1. НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 004.82, 621.13

1.1. Принцип двойственности в математической теории общего равновесия

Козырев А. Н., ЦЭМИ РАН, г. Москва, Россия

В статье излагается подход к математической теории экономического равновесия на основе последовательного применения принципа двойственности, привнесенного Л.В. Канторовичем из функционального анализа в выпуклый анализ, в линейное программирование и в экономику. Показано, что, следуя принципу двойственности, можно переписать все элементы известных моделей экономического равновесия на языке сопряженных пространств, сопряженных конусов и сопряженных полиэдров. Это позволяет очистить математические конструкции, используемые в теории общего экономического равновесия, от шлейфа идеологических догм, придать им в отдельных случаях новую интерпретацию и эффективно использовать в реальной экономике.

1. Введение

Статья задумана и написана как очередной шаг к пониманию происходящего на стыке экономики, информатики и математики, и что можно сделать полезного в управлении экономикой, где вчерашние «эксперты» и властители дум очень быстро становятся лжепророками, а профессиональные оптимисты находят для себя новые фетиши. И дело тут не в смене мемов как таковой при переходе от плана к рынку или от цифровой экономики к экономике данных. Сама по себе она столь же безобидна, как и переход от брюк дудочкой к брюкам клеш или наоборот, если за этим не стоит идеология и отказ от чего-то фундаментального, как, например, от математики в экономике, поскольку «рынок все решит», «переход в цифру обеспечит» или «главное сегодня – работа с данными». Математические достижения, как это ни странно, тоже могут быть отвергнуты по идеологическим соображениям, а цена такого отказа высока, что не мешает нам раз за разом наступать «на те же грабли». В этом есть что-то общее с потерей части навыков при очередной смене интерфейса гаджетов или почтовых клиентов, еще больше – с потерей важной части культурного наследия при переходе народов с языка империи на свой национальный язык. Так и с математикой, забыть о ней в погоне за очередным мемом можно, сложно вернуться к ней.

Как и в предшествующих статьях, посвященных кризису экономической науки в условиях цифровизации, перспективах превращения её в доказательную науку [Козырев, 2024] или месту экономистов в экономике данных, далее речь пойдет о математических моделях, алгебраических свойствах информации, а также о недооценённых достижениях отечественных математиков у себя на родине. На сей раз в центре внимания принцип двойственности по Л. В. Канторовичу и возможности его применения в математических моделях общего равновесия. В силу ряда причин много внимания уделено идеологии, её негативному влиянию на экономическую науку, а через неё на применение математики в экономике. Речь не только об идеологии марксизма, оказавшей угнетающее воздействие на всю советскую науку, особенно на экономическую, где для этого всё же были причины. Идеология в такой же степени затронула теорию общего экономического равновесия (далее – ОЭР), истоки которой принято связывать с трудом Леона Вальраса [Walras, 1874[, относительно недавно переведенным на русский язык [Вальрас, 2000], а её расцвет – со второй половиной 20-го века.

Раздел, следующий за настоящим введением, практически полностью посвящен идеологии и ее влиянию на судьбу математических методов в экономике, а также на математическую теорию ОЭР. В следующим за ним разделе показано, как можно избавиться от влияния идеологии, следуя принципу двойственности. Речь идет не только о прямой и двойственной задаче линейного или (шире) математического программирования, но и о сопряженных конусах, сопряжённых пространствах, а также о сопряжённых полиэдрах. Далее идет раздел, посвященный применениям моделей равновесного типа в реальной экономике. В качестве примеров приводятся проекты, реализованные в СО АН СССР и позже в СО РАН. Завершает статью эпилог, играющий роль традиционного заключения.

2. Равновесные цены, идеология и принцип двойственности

Выдающийся японский экономист Митио Моришима, изучавший труды и Маркса, и Вальраса, считал обоих последователями Давида Рикардо, а истоки теории экономического равновесия и роста видел в его трудах. Возможно, он прав и в этом, но главное другое. Моришима старался перевести их работы на язык математики и выделить конструктивную составляющую. В переведенной на русский язык монографии [Моришима, 1972] фигурирует модель экономической динамики Маркса-фон Неймана, обычно называемая моделью Неймана без упоминания Маркса. Кроме того, Моришима написал трилогию книг, каждая из которых посвящена одному из этих трех авторов, то есть Карлу Марксу [Morishima, 1973], Леону Вальрасу [Morishima, 1977] и их общему предтече Давиду Рикардо [Morishima, 1989]. Случайно или нет, но очень кстати теорию Маркса он называет двойственной теорией стоимости и роста. Похожий принцип очень хорошо подходит для очищения от идеологии теории ОЭР по Вальрасу. Это принцип двойственности. Своим основным достижением в экономике сам Канторович считал отнюдь не линейное программирование как алгоритм решения математических задач определенного типа, а открытие связи между двойственными переменными в задаче линейного программирования и ценами.

В этой связи уместно напомнить некоторые факты, связанные с личностью Л. В. Канторовича из истории применения математических методов в экономике СССР и кипевших вокруг этого страстей. В первую очередь это оценка его достижений и обвинения в его адрес. Для начала цитата о его достижениях из юбилейной (к 100-летию со дня рождения) статьи [Вершик, Кутателадзе, Новиков, 2012].

> *«Важно то, что с высоты понимания тогдашнего функционального анализа, он, как и – почти одновременно – фон Нейман в США, сразу же осознал, что речь идет о применении основополагающих идей функционального анализа, в частности принципа двойственности, который ставит весь выпуклый анализ, созданное им линейное программирование и тем самым важную часть экономической науки на твердую основу. По мнению большинства математиков, это самое замечательное достижение Л. В. Оно является ярким примером глубокого воздействия математики на другие науки и, в частности, на экономическую деятельность современного общества».*

В этой цитате особо следует подчеркнуть «принцип двойственности, который ставит … важную часть экономической науки на твердую почву». К теории ОЭР сказанное выше тоже относится, точнее, могло бы относиться, если бы не идеология и не регулярные подмены реальных экономических задач «сказками», заимствованными из экономической теории, пропитанной идеологией и в марксистском, и в неоклассическом исполнении. В том и другом случае причина подмен как раз в тесной связи между объективно обусловленными оценками по Канторовичу и равновесными ценами.

Если четко следовать принципу двойственности, «который ставит … на твердую почву» часть экономической науки и выпуклый анализ, то практически любую модель экономического равновесия можно понимать как задачу многокритериальной оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств, часть из которых включает двойственные переменные. Называть эти переменные ценами или нет – вопрос интерпретации. Идеология слишком часто идет рука об руку с интерпретацией, уводя в сторону от науки не только интерпретацию, но и направление исследований, включая математическую экономику.

Центральное понятие теории ОЭР – равновесные цены в условиях конкуренции, то есть цены, формируемые рынком и обеспечивающие равенство спроса и предложения, а при совершенной конкуренции еще и оптимальное распределение имеющихся ресурсов. Математическая теория ОЭР еще и красива.

Разумеется, в теории ОЭР есть много логически выверенных рассуждений и математических конструкций, включая теоремы о существовании равновесий, о конечности их числа и рассуждения о механизмах достижения равновесных цен. Но, как только в научном (по замыслу его автора) тексте появляется слово «цены», идеология входит в придуманный им мир «с развернутыми знаменами, трубами и барабанами». Цены – слишком чувствительная тема для подавляющего большинства людей, а потому рассуждать о них, не касаясь идеологии, не получается. Канторович назвал двойственные переменные в модели линейного программирования объективно обусловленными оценками, а не оптимальными ценами, предвидя обвинения в субъективизме. Не помогло. Обвиняли, писали доносы.

В советское время идеологические работники и политэкономы усматривали буржуазную идеологию в самой идее оптимальных цен на основе двойственных переменных, находя аналогии с математическими идеями западных исследователей, противопоставлявшимися марксизму. В 1964 году состоялась дискуссия между крупнейшими на тот момент математиками и экономистами, а в 1965 году вышла книга с расшифровкой стенограмм и небольшими комментариями. Примечательно, что отрывки, посвященные объективно обусловленным оценкам, выделены в отдельный раздел. Причина в том, что еще до публичной дискуссии содержание монографии [Канторович, 1960] вызвало серию обвинений в том, что вместе с математикой в советскую экономическую науку пытаются протащить идеи маржинализма. Доносы, написанные до дискуссии, в эту книгу, разумеется, не вошли, но в выступлениях математиков Л. В. Канторовича и С.Л. Соболева ясно чувствуется реакция скорее на них, чем на выступления оппонентов в зале. И все же идеологическая атака на математические методы в экономике там состоялась. Яркий пример – выступление д.э.н., В.М. Колганова. Оно начинается с констатации исторического факта.

> *«Первый вопрос — о марксизме и математике. Марксизм, конечно, никогда не выступал против математики, но марксизм всегда выступал против математической школы политической экономии, которая, кстати говоря, возникла раньше марксизма, в начале XIX в., и была постоянным врагом марксизма и остается таковой по настоящий день» [экономисты и математики, 1965, С. 163].*

В этом абзаце можно усмотреть, как минимум, перебор идеологической бдительности или непонимание сути математических методов, что далее (в его речи) находит определенное подтверждение. Но выступающий говорит не о математических методах в экономике, а о чистой политэкономии, частично переведённой на язык математики. А следующий абзац того же выступления вообще не о математических методах, а о политике и образовании.

> *«Есть ли опасность в том, что вместе с применением математики к нам проникнут и неправильные идеи, которые защищает эта математическая школа? Есть. Молодежь слишком увлекается математическими методами, а наш книжный рынок наводнен переводной буржуазной литературой. И <u>если в специальной математической литературе по применению линейной алгебры не развиваются все социальные идеи математической школы, то в ряде случаев они подразумеваются. И молодежь усваивает их</u>».*

Сказано это в 1964 году. Сегодня (в 2024) понятно, что здесь М.В. Колганов формально неправ в части «линейной алгебры», которая была и осталась алгеброй. Но он оказался прав в том, какие идеи подразумеваются «в ряде случаев», если вспомнить не только итоги перестройки, но и путь к ним.

На этом пути были и чисто теоретические обсуждения идей общего равновесия, и осторожные попытки рассуждений о переходе к рынку, и ошеломляющий успех выступлений «рыночных экстремистов» Ларисы Пияшевой и Виталия Найшуля на публичных мероприятиях в конце 80-х – начале 90-х прошлого века. Благодаря использованию ярких образов, эмоциональности выступлений (и предельному упрощению ключевых идей экономического равновесия на конкурентном рынке) рыночные экстремисты затмили академиков-экономистов, выступавших с рыночными идеями. Теоретические идеи Вальраса и его последователей были восприняты рыночными экстремистами и преподносились ими широкой аудитории как прямое руководство к действию, а промедление с действиями со стороны реформаторов – как предательство этих идей. Общество или, точнее, часть общества, воображающая себя думающей, оказалась полностью подготовленной для восприятия «идей рынка» именно в таком виде. После 1991 года идеология, заложенная в работах по теории общего равновесия, стала господствующей в России, причем в более агрессивной форме, чем в США. Особенно ярко это проявляется в том, как действуют антимонопольные органы в США и в России. А в публикациях это иногда выглядит просто курьёзно. Например, много восторженных, но не всегда точных слов сказано в предисловии к [Вальрас, 2000].

> *Логическая стройность и математическая строгость, отличающие теорию Вальраса, естественные для математиков, но отнюдь не характерные для экономистов, вызывали восхищение многих поколений экономистов. [Вальрас, 2000. C.VI]*

Или еще там же.

> *Все здание теории Вальраса построено на основе двух основополагающих гипотез — максимума удовлетворения, или полезности, и равенства спроса и предложения для всех товаров. Эти гипотезы определяют и предмет анализа — состояние равновесия, причем, если первая задает равновесие как состояние каждого отдельного экономического субъекта, то вторая фиксирует равновесие как состояние системы взаимодействующих субъектов в целом. [Вальрас, 2000. C.VI]*

С точки зрения математика «логическая стройность и математическая строгость» теории Вальраса не так уж далеко ушли от теории Маркса. А идеологическая составляющая в ней не просто присутствует, а доминирует. Просто она имеет принципиально иную направленность. Никакого взаимодействия субъектов в модели Вальраса нет, есть именно гипотеза, или «сказка» о том, что такое состояние достигается в результате некоторой процедуры «нащупывания», напоминающей аукцион. Строго говоря, нет и модели с полным набором условий существования решения и приписываемых ему свойств. Все это появилось много позже и полностью оформилось в математическую теорию примерно через сто лет усилиями многих математиков, сохранив при этом родимые пятна исходной идеологии.

Идея Вальраса о том, что свободная конкуренция множества независимых экономических агентов приведет к равновесию с оптимальным распределением ресурсов и равновесными ценами, ясно просматривается в работах Дебрё и его последователей, включая почти всех, кого он упоминает в программной докладе [Debreu, 1974] о четырех аспектах математической теории экономического равновесия и в нобелевской речи 1983 года. Несколько особняком в этом ряду упоминаемых стоит Стефан Смейл, чей интерес к теории ОЭР возник в связи с обобщением теории Морса [Смейл, 1972] путем перехода от оптимизации по одному критерию к многокритериальной оптимизации и, соответственно, к понятию оптимальности по Парето, заимствованному из теории ОЭР. В итоге Смейл обобщил понятие оптимальности по Парето, распространив его на случай гладких многообразий, доказал несколько новых теорем и изложил их в серии статей под общим названием "Global analysis and economics", стараясь не отклоняться от общей линии. Среди этих работ особо стоит выделить [Smale, 1973, 1975, 1976], где Смейл вводит в модель динамику, частично уходя от общей для теории ОЭР идеологии.

3. Принцип двойственности, уравнение Вальраса и оптимальные цены

Для иллюстрации принципа двойственности применительно к моделям равновесия вальрасовского типа имеет смысл вернуться к гипотезам, на которых построено все «здание теории Вальраса», но в современной (математической) их интерпретации. Частично она основана на обобщенной теории Морса по Смейлу, или (шире) на теории гладких многообразий, а частично – на теории негладкой оптимизации [Демьянов, Васильев, 1972], а через нее – на теории выпуклых многогранников [Александров, 1950].

В модели обмена с m агентами и l продуктами, традиционно используемой для демонстрации идей из [Вальрас, 2000] предполагается, что продукты изначально распределены между агентами, т.е. задан вектор $(w_1, \dots, w_m) \in R_+^{lm}$, именуемый начальным распределением продуктов, которые могут перераспределяться между агентами, приводя к распределениям вида $(x_1, \dots, x_m) \in R_+^{lm}$, где

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{i=1}^{m} w_i, \qquad (1)$$

то есть суммарное потребление продуктов не превышает их суммарного количества, но продукты могут использоваться не полностью. Цены в экономике чистого обмена с l продуктами принято понимать как l-мерный неотрицательный вектор p, нормированный тем или иным способом. Цена произвольного продуктового набора x_i – скалярное произведение этих двух векторов, обозначаемое далее $\langle p, x \rangle$. Равенство

$$\langle \sum_{i=1}^{m} (w_i - x_i), p \rangle = 0, \qquad p \in R_+^l, \qquad (2)$$

известное как закон Вальраса, очень похоже на условие дополняющей нежесткости в задаче линейного программирования, что имеет под собой определенные основания. В самом деле, с учетом неотрицательности вектора p и неравенства (1) из уравнения (2) следует, что ненулевым компонентам p соответствуют нулевые компоненты $\sum_{i=1}^{m}(w_i - x_i)$ и наоборот.

В линейном программировании условие дополняющей нежесткости – необходимое и достаточное условие оптимальности. Содержательно оно означает, что ограничения, соответствующие нулевым двойственным переменным, «не работают» (так как выполняются в виде строгих неравенств). Важно здесь именно то, что ненулевые двойственные переменные могут соответствовать только ограничениям в виде равенств, при этом неотрицательность двойственных переменных не требуется. В «сказке» про равновесие нулевой цене продукта соответствует его избыточное предложение. Интуитивно понятно, что так и должно быть для оптимальности по Парето. Если есть избыточный продукт, то он избыточен для всех, иначе его можно перераспределить с пользой для кого-то. Если это невозможно, то у всех агентов соответствующие компоненты двойственных переменных нули. Но это – интерпретация на языке экономики. В каких-то случаях она помогает понять суть дела, в каких-то мешает. В данном случае интерпретация помогает понять роль закона Вальраса в модели, но мешает видеть за ней геометрию.

Максимум удовлетворения или полезности для отдельного экономического агента можно формально описать разными способами. Так, в [Debreu, 1972] рассматриваются три варианта представления интересов отдельных экономических агентов: (1) функции спроса; (2) отношения предпочтения (3); функции полезности. Показано, что все три варианта в каком-то смысле эквивалентны, то есть при выполнении достаточно естественных условий гладкости, монотонности и выпуклости они приводят к одинаковым результатам. Вариант (1) удобен для доказательства теорем существования и конечности числа равновесий, но слишком привязан к интерпретации и идеологизирован. Вариант (3) наиболее точно соответствует исходной идее Вальраса и подходу Смейла, но критикуем Дебрё, так как «полезность невозможно наблюдать или хотя бы нарисовать. Вариант (2) при $l = 2$ позволяет нарисовать линию уровня функции полезности, или кривую безразличия (в терминах предпочтений).

Все это можно переписать еще и на языке сопряженных конусов, что более соответствует принципу двойственности и позволяет ослабить требования гладкости [Демьянов, Васильев, 1981]. Если кривая безразличия гладкая, то конус желательных направлений в любой ее точке – открытое полупространство, сопряженный к нему конус – луч, ортогональный касательной гиперплоскости в той же точке. Если рассматривать касательную гиперплоскость как конус, то сопряженный конус – ортогональная к ней и проходящая через точку касания прямая. Эти же луч и прямую можно получить из градиента функции полезности, если она гладкая. А можно с самого начала считать, что предпочтения заданы как градиенты гладких функций, или как векторные поля. Этот подход легко обобщается на кусочно-гладкий случай.

Еще одна важная деталь моделей равновесия – бюджеты экономических агентов. В модели чистого обмена бюджет агента i полагается равным $\langle \bar{p}, w_i \rangle$, где $\bar{p}$ – вектор равновесных цен. Согласно «сказке» агент продает весь свой начальный запас по ценам равновесия, а на вырученную сумму покупает наиболее предпочтительный при данных бюджете и ценах продуктовый набор $\bar{x}_i$. То есть требуется выполнение неравенства $\langle \bar{p}, \bar{x}_i \rangle \leq \langle \bar{p}, w_i \rangle$ для каждого i, которое при условии (2) превращается в равенство. Уязвимость гипотезы о продаже всего для критики с позиций здравого смысла слишком очевидна, но таковы правила игры, это надо принять как должное. Включение в модель дополнительных условий типа перераспределения части доходов через налоги [Зак, 2010] или распределения части начальных запасов по твердым ценам с перепродажей по рыночным [Зак, 2023] не добавляет убедительности. Модель статична, а бюджет агента так или иначе формируется. В этом смысле любое правило его формирования точно не хуже всех остальных. Далее математики начинают исследовать вопросы существования, локальной единственности и устойчивости состояний равновесия. С глобальной единственностью не получается, речь идет лишь о конечности числа равновесий. Получается очень красивая математическая теория, где математики творят, а экономисты ссылаются на их результаты, когда это им удобно.

Если забыть на время о «ценах» и «бюджетах», но не о предпочтениях или функциях полезности, то получим задачу многокритериальной оптимизации, или, точнее, задачу распределения ограниченных ресурсов между m независимыми агентами. Оптимальность здесь понимается по Парето, то есть нельзя путем перераспределения ресурсов улучшить положение ни одного агента, не ухудшая положение ни одного другого. Смейл, обобщил понятие оптимальности по Парето на случай локальных экстремумов и ввел в оборот понятие расширенного равновесия.

Сразу стоит заметить, что в условиях [Smale, 1973, 1975,1976], где критерии оптимальности заданы гладкими функциями полезности u_i, оптимальность $(x_1, \dots, x_m)$ по Парето соответствует пропорциональности градиентов всех целевых функций, то есть $\nabla u_i(x_i) \propto \nabla u_i(x_i)$, для любых i и j. Здесь $\propto$ – символ пропорциональности. Компоненты векторов $\nabla u_i(x_i)$ – двойственные переменные или (в переводе на язык теории равновесия) предельные полезности ресурсов (продуктов) для агента i. Можно переформулировать тот же признак, то есть говорить, что $(x_1, \dots, x_m)$ оптимальное распределение ресурсов, если найдется вектор цен p, которому пропорциональны все $\nabla u_i(x_i)$. Но тогда возникает вопрос о том, откуда эти цены берутся. Согласно Вальрасу, они определяются в процессе «нащупывания», где все агенты предварительно объявляют свои представления о ценах, а потом договариваются и обмениваются. Эта «сказка» живет и сегодня [Зак, 2023]. Но не выглядит сколько-нибудь убедительно.

Сюжет, предлагаемый в [Smale, 1973, 1976] – попытка ввести в модель динамику, но интересен он еще и тем, как определяются цены и направление движения к границе Парето в каждой точке пути, или (иными словами) в каждый момент времени. Если на момент t состояние $x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_m(t)\big)$ не является оптимальным по Парето, то для каких-то i и j найти подходящий вектор обмена достаточно просто. Можно сложить векторы $\nabla u_i\big(x_i(t)\big)$, в качестве $p(t)$ взять нормализованную сумму, то есть

$$p(t) = \sum_{i=1}^{m} \nabla u_i\big(x_i(t)\big) \Bigg/ \sqrt{\Big\langle \sum_{i=1}^{m} \nabla u_i\big(x_i(t)\big), \sum_{i=1}^{m} \nabla u_i\big(x_i(t)\big) \Big\rangle}. \tag{3}$$

Направление обмена для каждого i можно получить по формуле

$$\Delta x_i(t) = \nabla u_i\big(x_i(t)\big) - \mu_i p(t), \;\; \mu_i = \langle \nabla u_i\big(x_i(t)\big), p(t) \rangle \,.$$

Тогда $\langle \nabla u_i\big(x_i(t)\big), \Delta x_i(t) \rangle > 0$ для каждого i, а сумма $\Delta x_i(t)$ по всем i равна нулю. Иначе говоря, вектор $\big(\Delta x_1(t) \dots . \Delta x_m(t)\big)$ – направление инфинитезимально малого обмена.

Изложенная выше схема с некоторыми поправками распространяется на случай, когда функции u_i кусочно-гладкие. Тогда при некоторых t функция u_i для каждого i имеет вид

$$u_i\big(x_i(t)\big) = \min_j v_{ij}\big(x_i(t)\big), \;\; j \in J_i\big(x_i(t)\big),$$

где v_{ij} для всех i и j – гладкие функции. Функции u_i указанного вида квазидифференцируемы, причем квазидифференциал в точке $x_i(t)$ представим в виде $(\overline{\partial} u_i\big(x_i(t)\big), 0)$, где $0 \in R^l$ – субдифференциал, а

$$\overline{\partial} u_i\big(x_i(t)\big) = co\big\{\nabla v_{ij}\big(x_i(t)\big), j \in K_i\big(x_i(t)\big)\big\}.,$$

– супердифференциал u_i в $x_i(t)$, где набор $K_i\big(x_i(t)\big) \subset J_i x_i(t)$ задан условием

$$K_i\big(x_i(t)\big) = \big\{j \in J_i | v_{ij}\big(x_i(t)\big) = u_i\big(x_i(t)\big)\big\}.$$

Смысл выделения подмножества $K_i\big(x_i(t)\big)$ состоит в том, что ненулевые множители могут иметь градиенты функций v_{ij} только с минимальными значениями [Demyanov, Rubinov, 1995].

Решая задачу квадратичного программирования

$$\sum_{i=1}^{m} \langle g_i - \gamma_i p, g_i - \gamma_i p, \rangle \to min, \;\; g_i \in \overline{\partial} u_i\big(x_i(t)\big), \gamma_i \in R_+ \; \forall i; p \in R_+^l, \tag{4}$$

получим вектор цен $p(t)$ и набор коэффициентов $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$, для которых выполняются условия

$$\langle g_i(t) - \gamma_i(t) p(t), g_i \rangle \geq 0 \; \forall g_i \in \overline{\partial} u_i\big(x_i(t)\big), \sum_{i=1}^{m} \langle g_i(t) - \gamma_i(t) p(t), g_i \rangle = 0, \tag{5}$$

причем для некоторых i неравенства строгие. Точнее, в ситуации общего положения, достижимого сколь угодно малым «шевелением», неравенства строгие для всех i. Иначе говоря, получается направление обмена $\big(\Delta x_1(t) \dots . \Delta x_m(t)\big)$, где $\Delta x_i(t) = g_i(t) - \gamma_i(t) p(t)$, улучшающее положение всех агентов.

4. Равновесные решения и цены в реальной экономике

В реальной экономике ограничения очень часто подразумеваются, а не формулируются в явном виде, но об их существовании нужно знать или, как минимум, догадываться. То есть задача выглядит совсем не так, как в теории, где каждый агент ориентируется только на цены, но и не так, как задача многокритериальной оптимизации из учебника. Есть определенное сходство с тем, что рассматривается как инфинитезимальный обмен в [Смейл, 1972] при движении к тому, что там называется критической точкой, а потом в [Smale, 1976] при движении к границе Парето в экономике чистого обмена. В реальности очень трудно бывает представить, как выглядит граница Парето, поскольку всегда есть неизвестные на данный момент ограничения. Можно выбрать лишь направление изменений (обмена), при движении по которому улучшаются показатели по всем критериям. Но при движении в выбранном направлении такие ограничения выявляются. Их надо учитывать и корректировать направление. То есть возникает именно та ситуация, которая описывается формулами (4) и (5), с той лишь поправкой, что обнаруживаются дополнительные ограничения, а не ортогональные к ним градиенты функций полезности.

Также следует учитывать, что имеющиеся данные, на основе которых строится модель, практически всегда весьма скудны. Приходится экстраполировать значения функций, используемых в описании модели на промежуточные участки. При этом обычно нет смысла использовать сколько-нибудь сложные функции. Чаще всего используются линейные или кусочно-линейные функции, иногда квадратичные, а также CES-функции и некоторые другие достаточно простые функции, с которыми удобно работать. Но чаще всего для реальных расчетов используются модели, в которых все или почти все ограничения линейны, а целевые функции кусочно-линейны. На самом деле задачи линейного программирования и задачи с кусочно-линейными функциями полезности – один тип задач, записанных на немного разном математическом жаргоне. Супердифференциал кусочно-линейной функции соответствует множеству решений двойственной задачи линейного программирования, когда оно определяется неоднозначно.

Для решения задач квадратичного программирования (4) достаточно давно разработаны эффективные алгоритмы [Булавский, 1973]. А потому описанная выше схема в реальных задачах приводит к решению в конечное число шагов. Описанная схема была реализована [Козырев, 1975] в блоке Перспективное планирование «АСУ-Прибор». Теоретически в конечное число шагов достигается оптимальное по Парето решение (точка на границе Парето). Однако на практике предприятия в советское время не очень стремились раскрывать свои полные возможности, опасаясь получить плановое задание на пределе этих возможностей, а на следующем этапе – за пределами с последующими оргвыводами. Именно это тормозило использование линейного программирования и математических методов. Сегодня проблема с достоверностью отчётности в части имеющихся возможностей и ограничений никуда не исчезла. А потому можно с относительной уверенностью говорить лишь о текущем состоянии и возможных обменах.

В чем-то похожая конструкция рассматривалась в [Козырев, 1981] применительно к задаче об использовании нескольких посевных площадей под посевы разных культур. Она возникла из статичной задачи по расчету цен и рентных платежей, где за основу принималось текущее распределение посевов культур по площадям [Вирченко, Шестакова, 1977]. В качестве ограничений в этой задаче выступали площади участков, а в качестве цели рассматривалась совокупная цена всего урожая при текущих закупочных ценах. Текущее решение (фактическое использование площадей) было заведомо неоптимально, то есть оно не было оптимальным ни при каких закупочных ценах. Однако подразумевалось наличие каких-то дополнительных ограничений или целей помимо заявленных.

Реальные расчеты с применением моделей равновесия вальрасовского типа (наряду с теоретическими исследованиями) проводились в различных институтах СО АН СССР, а сейчас продолжают проводиться в институтах СО РАН и Новосибирском государственном университете в основном по региональной тематике [Гамидов, Доможиров, Ибрагимов, 2013]. Такая тенденция установилась, начиная с работы [Рубинштейн, 1983], где в качестве экономических агентов выступают отдельные страны или объединенные по каким-то признакам группы стран, а позже регионы Сибири и Дальнего Востока. В это же время и в непосредственной связи с началом исследований А.Г. Рубинштейна развивался оригинальный подход к решению линейных задач данного типа [Шмырев, 1983, 2014, 2020], выросший со временем в теорию сопряженных полиэдров и эффективный метод численного решения линейных задач равновесного типа. Среди теоретических работ с применением достаточно сложной математики и привязкой к региональной тематике также стоит отметить [Васильев, Суслов, 2010],

Не менее интересно рассмотреть ситуацию, когда предпочтения отдельных агентов независимы и могут быть представлены гладкими кривыми безразличия или функциями полезности, но переменные y_j, описывающие потребление разных экономических агентов, связаны неравенством

$$\max_{j\in N} y_j \le \max_{j\in N} z_j \quad N = \{1,2,\dots,n\}, y_j, z_j \in R_+^s \tag{6}$$

где s – натуральное число. Иначе говоря, вместо операции суммирования используется операция максимума. Замена операции сложения операцией максимума при сохранении обычного умножения и ограничении в использовании только неотрицательных чисел дает полуполе, над которым можно построить вполне полноценную математику. Но вернемся к условию (6).

Обозначения переменных изменены по той причине, что речь идет о продуктах совсем иного типа. Например, это могут быть базы данных. Если не вводить искусственных ограничений, то любой из имеющихся баз данных может пользоваться любой экономический агент независимо от того, кому она принадлежит (кем создана и т.д.). Понятия «больше» или «меньше» можно трактовать как полноту той или иной базы данных. Разные компоненты векторов y_j, z_j можно понимать как разную специализацию баз данных и т.д. С непривычки может показаться, что здесь есть некоторые натяжки, но это временно. Такие условности есть и в моделях с обычными продуктами. Число домов или поголовье скота не бывает дробным. Но ни то, ни другое не мешает переходить от дискретных моделей к непрерывным, если надо.

Задачу с ограничением (6) лучше начать рассматривать, когда есть только один продукт, то есть y_j и z_j надо понимать как числа, но для разных j они, вообще говоря, разные. Точнее, в общем положении равенства нет, то есть при небольшом «шевелении» различие сохраняется, равенство – нет. Задача, решаемая для каждого j при естественных предположениях монотонности, оказывается тривиальной.

Надо просто выбрать максимальный z_j, то есть выбрать $\bar{j}$, при котором $z_{\bar{j}} \geq z_j$ для любого j. Если продуктов много, то каждому продукту k в условиях общего положения будет соответствовать свой $\bar{j}(k)$. Разумеется, можно рассмотреть ситуации, когда не все y_j совпадают с покомпонентным максимумом $z_j, j \in N$, а некоторые $\bar{j}(k)$ определяются неоднозначно. Технически в этом нет особой сложности, но есть дополнительные возможности для рассуждений о монополизме и ценах, а вместе с ними и для идеологических спекуляций. Вместе с тем, именно здесь математика может помочь увидеть такие эффекты и решения, которые очень трудно увидеть без неё, а увидев, трудно доказать, что ты их видишь. Проблема экономической теории в том, что идеология всегда диктует правила отбора деталей, которые с ней вяжутся, отметая те из них, что не вяжутся. Теория ОЭР – не исключение.

Если переводить сказанное выше на язык экономики, то получается, что в идеале нужен только один производитель каждого продукта, то есть идеал – монополия. Если производителей больше, то можно говорить о напрасной трате средств, Но система, где все в единственном экземпляре, чрезвычайно уязвима. Многие продукты производятся в наборе, типичный пример из экономической теории – шкуры и мясо овец. А в наукоемком секторе такое встречается часто, многие великие изобретения появились как побочные продукты. Изобретения – продукты типа y_j, если на их использование не наложены ограничения путем патентования или засекречивания. То же касается программных продуктов, баз данных и много чего еще, различаются лишь инструменты правовой охраны. Все это – важные детали, а потому всегда приходится делать выбор между тем, что включать в модель, а что не включать. Здесь напрашивается образ сечения. Многие известные кривые получаются как сечения конуса. Нечто подобное применимо и к построению математических моделей. Сечение выбирается в зависимости от цели.

Переходя к вопросу о двойственных переменных, прежде всего важно отметить, что замена связующего неравенства (1) на неравенство (6) приводит к радикальному изменению связей между двойственными переменными, интерпретируемыми как цены. Оптимальные двойственные переменные здесь различаются для разных j как «потребителей» и составляют в сумме цену для $\bar{j}$ как «поставщика». Если вдуматься, то можно увидеть нечто подобное, но частично скрытое под ворохом деталей, в положении Google на рынке некоторых цифровых продуктов и услуг. А еще интереснее вопрос об оптимальных двухкомпонентных ценах [Козырев, 2023], давно используемых в наукоемких секторах экономики. Это и цены в лицензионных договорах, и тарифы на связь.

Эпилог

Подводя итог сказанному, можно с уверенностью утверждать, что идеология продолжает мешать применению математики в экономике, хотя старые догмы, казалось бы, сняты. Принцип оптимальности по Парето в настоящее время обобщен С. Смейлом и применим в любой задаче оптимизации, где есть набор критериев или целевых функций числом более единицы. Изначально он был введен Вильфредо Парето именно для модели обмена, поставив тем самым идею Вальраса на твердую математическую почву. Это важно в данном контексте по той причине, что с именем Парето связан не только этот математический принцип, но и определенная идеология, а именно, идеология итальянского фашизма, что давало советским идеологическим работникам пищу для спекуляций, тогда как наша цель – уйти и от идеологии, и от лишних ограничений, связанных со «сказкой» о равновесии как о состоянии, достижимом и оптимальном в условиях совершенной конкуренции. Но «сказка» о формируемых рынком равновесных ценах (не без участия антимонопольных служб), продолжает жить.

Зависимость от идеологии удалось преодолеть разве что Митио Моришиме, считавшему Маркса и Вальраса последователями Рикардо, внесшими достойный вклад в науку и одинаково заслуживающими уважения. Возможно, именно эта сдержанность привела к тому, что его книга о равновесии и росте относительно редко цитируется. Спросом пользуются, прежде всего, идеологически ангажированные публикации. Идет ли речь о преимуществах плановой или рыночной экономики, в обоих случаях основной идеологический посыл должен быть ясен, тогда есть сторона, готовая за него платить, есть сообщество, готовое такую работу читать и цитировать. Если идеологии нет, то аудитория сужается, число интересантов сокращается, а спрос на такие публикации падает. Применение сложной математики тоже работает отнюдь не на спрос, скорее по принципу: «Осторожно, злая собака, а кот вообще отморозок».

Литература

1. Александров А.Д. (1950) Выпуклые многогранники. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 428 с.
2. Булавский В.А. (1973) Один специальный алгоритм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5**(**22**)**, Новосибирск, 1973, –. 23–36.
3. Вальрас Л. (2000) Элементы чистой политической экономии. — М.: Изограф, 2000. - 448 с. ISBN 5-87113-102-
4. Васильев В. А., Суслов В. И. (2010) Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сиб. журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 1. – 18–33.
5. Вершик А. М., Кутателадзе С. С., Новиков С. П. (2012) Леонид Витальевич Канторович (к 100-летию со дня рождения), УМН. 2012, том 67, выпуск 3(405), – 185–191, DOI: 10.4213/rm9475

6. Вирченко М. И., Шестакова Н. В. Экономическим анализ оценок продукции и ресурсов в задачах размещения сельскохозяйственного производства. - В кн.: Проблемы экономической кибернетики в сельском хозяйстве. Новосибирск, 1977, –. 34–54.
7. Гамидов Т.Г., Доможиров Д.А., Ибрагимов Н.М. (2013) Равновесные состояния открытой межрегиональной системы, порожденной оптимизационной межрегиональной межотраслевой моделью. – ISSN 1818–7862. Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2013. Том 13, выпуск 3, – 81–94.
8. Демьянов В.Ф. Васильев Л.В. (1981) Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. – 384 с.
9. Зак Ф. Л. (2010) Налогообложение в вальрасовской экономике. *Журнал Новой экономической ассоциации* №6, – 30–60.
10. Зак Ф.Л. (2023) Рационирование и рынок: структура и устойчивость равновесий // Экономика и математические методы – 2023. – Том 59. – № 2, 68–86, DOI: 10.31857/S042473880025860-5
11. Канторович Л.В. (1960) Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд-во Академии наук СССР, 1960 - 346 с.
12. Козырев А. Н. Оптимальные двухкомпонентные цены в экономиках с возрастающей отдачей // Цифровая экономика № 1(22), 2023 – 54–64. DOI: 10.34706/DE-2023-01-07
13. Козырев А.Н. (2024) Мультидисциплинарный подход как шанс на спасение экономической науки (от экономистов) // Цифровая экономика № 1(27), 2024 – 5–13. DOI: 10.34706/DE-2024-01-01
14. Козырев А. Н. Об одном алгоритме многоцелевого планирования. (на примере размещения закупок сельскохозяйственной продукции по районам области). - В кн.: Численные методы оптимизации и их приложения. Иркутск, 1981, – 72–83.
15. Козырев А.Н. (1975) Оптимизация распределения ресурсов в системе линейных моделей производства - В кн.: Оптимизация. Вып. 165(33), Новосибирск, 1975, – 61–72.
16. Моришима, М. (1972) Равновесие, устойчивость, рост: Многоотраслевой анализ = Equilibrium, Stability and Growth: A multi-sectoral analysis (1964) / Под общ. ред. В. Л. Макарова — М.: Наука, 1972. — 279 с.
17. Рубинштейн А. Г. (1983) Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
18. Шмырев В. И., (1983) Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена, Докл. АН СССР, 1983, Т. 268, № 5, – 1062–1066
19. Шмырев В. И., (2014) Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных моделях конкурентной экономики // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 2. – . 84–101.
20. Шмырев В. И., (2020) Двойственность в линейных экономических моделях обмена // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. - 2020. - Т. 26. - № 3, – 258–274
21. Смейл С. (1972) Глобальный анализ и экономика, I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса / Успехи математических наук, т. XXVII, вып. 3(165). – 177–187.
22. Экономисты и математики (1965) Экономисты и математики за круглым столом 1965
23. Debreu G. (1972) Smooth Preferences. Econometrica 40, – 603–616.
24. Debreu G. (1974) Four Aspects of the Mathematical Theory of Economic Equilibrium. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vancouver, 1974. – 65–77.
25. Demyanov, V. F. and Rubinov A. M., (1995), “Constructive Nonsmooth Analysis,” Verlag Peter Lang, New York, 1995
26. Michio Morishima (1973) MARX’S ECONOMIC’S A dual theory' of value and growth. Cambridge University Press 1973.
27. Michio Morishima (1977) Walras’s Economics: A pure theory of capital and money, 1977
28. Michio Morishima (1989) Ricardo’s Economics, 1989.
29. Smale, S. (1975) Global analysis and economics. Synthese Volume Issue 31, p. 345–358 (1975). https://doi.org/10.1007/BF00485983
30. Smale, S. (1976), Exchange processes with price adjustment, Journal of Mathematical Economics, Elsevier, vol. 3(3), – 211-226.
31. Smale, S. (1973) Global analysis and economics. I. Pareto optimum and a generalization of Morse theory. In: Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), – 531-544. Academic Press, New York (1973)

References in Cyrillics

1. Aleksandrov A.D. (1950) Vy`pukly`e mnogogranniki. — M.-L.: Gostexizdat, 1950. — 428 s
2. Bulavskij V.A. (1973) Odin special`ny`j algoritm kvadratichnogo programmirovaniya. - V kn.: Optimizaciya. Vy`p. 5(22), Novosibirsk, 1973, – 23–36.
3. Val`ras L. (2000) E`lementy` chistoj politicheskoj e`konomii. — M.: Izograf, 2000. - 448 s. ISBN 5-87113-102-6
4. Vasil`ev V. A., Suslov V. I. (2010) Ravnovesie E`dzhvorta v odnoj modeli mezhregional`ny`x e`konomicheskix otnoshenij // Sib. zhurnal industrial`noj matematiki. 2010. T. 13, № 1. S. 18–33.

5. Vershik A. M., Kutateladze S. S., Novikov S. P. (2012) Leonid Vital`evich Kantorovich (k 100-letiyu so dnya rozhdeniya), UMN. 2012, tom 67, vy`pusk 3(405), – 185-191 DOI: 10.4213/rm9475
6. Virchenko M. I., Shestakova N. V. E`konomicheskim analiz ocenok produkcii i resursov v zada-chax razmeshheniya sel`skoxozyajstvennogo proizvodstva. - V kn.: Problemy` e`konomicheskoj ki-bernetiki v sel`skom xozyajstve. Novosibirsk, 1977, – 34-54.
7. Gamidov T.G., Domozhirov D.A., Ibragimov N.M. (2013) Ravnovesny`e sostoyaniya otkry`toj mezh-regional`noj sistemy`, porozhdennoj optimizacionnoj mezhregional`noj mezhotraslevoj mo-del`yu. – ISSN 1818-7862. Vestnik NGU. Seriya: Social`no-e`konomicheskie nauki. 2013. Tom 13, vy`pusk 3, – 81–94.
8. Dem`yanov V.F. Vasil`ev L.V. (1981) Nedifferenciruemaya optimizaciya. M.: Nauka, 1981. – 384 s.
9. Zak F. L. (2010) Nalogooblozhenie v val`rasovskoj e`konomike. Zhurnal Novoj e`konomicheskoj associacii №6, – 30–60.
10. Zak F.L. (2023) Racionirovanie i ry`nok: struktura i ustojchivost` ravnovesij // E`konomika i matematicheskie metody` – 2023. – Tom 59. – № 2, 68–86, DOI: 10.31857/S042473880025860-5
11. Kantorovich L.V. (2011) Matematiko-e`konomicheskie raboty` / L. V. Kantorovich. — Novosibirsk: Nauka, 2011. — 760 s. — (Izbranny`e trudy`). ISBN 978–5–02–019076–4.
12. Kozy`rev A. N. Optimal`ny`e dvuxkomponentny`e ceny` v e`konomikax s vozrastayushhej otdachej // Cifrovaya e`konomika № 1(22), 2023 – 54–64. DOI: 10.34706/DE-2023-01-07
13. Kozy`rev A.N. Cifrovizaciya, matematicheskie metody` i sistemny`j krizis e`konomicheskoj nauki //Cifrovaya e`konomika № 4(8), 2019 – 1-20, DOI: 10.34706/DE-2019-04-01
14. Kozy`rev A. N. Ob odnom algoritme mnogocelevogo planirovaniya. (na primere razmeshheniya zakupok sel`skoxozyajstvennoj produkcii po rajonam oblasti). - V kn.: Chislenny`e metody` optimi-zacii i ix prilozheniya. Irkutsk, 1981, – 72–83.
15. Kozy`rev A.N. (1975) Optimizaciya raspredeleniya resursov v sisteme linejny`x modelej proizvod-stva - V kn.: Optimizaciya. Vy`p. 165(33), Novosibirsk, 1975, – 61–72.
16. Morishima, M. (1972) Ravnovesie, ustojchivost`, rost: Mnogootraslevoj analiz = Equilibrium, Stability and Growth: A multi-sectoral analysis (1964) / Pod obshh. red. V. L. Makarova — M.: Nauka, 1972. — 279 s
17. Rubinshtejn A. G. (1983) Modelirovanie e`konomicheskix vzaimodejstvij v territorial`ny`x sistemax. Novosibirsk: Nauka, 1983. 238 s.
18. Shmy`rev V. I., (1983) Ob odnom podxode k oty`skaniyu ravnovesiya v prostejshix modelyax ob-mena, Dokl. AN SSSR, 1983, T. 268, № 5, – 1062–1066
19. Shmy`rev V. I., (2014) Algoritmy` polie`dral`noj komplementarnosti dlya oty`skaniya ravnovesiya v linejny`x modelyax konkurentnoj e`konomiki // Diskretny`j analiz i issledovanie operacij. 2014. T. 21, № 2. – 84–101.
20. Shmy`rev V. I., (2020) Dvojstvennost` v linejny`x e`konomicheskix modelyax obmena // Tr. In-ta ma-tematiki i mexaniki UrO RAN. - 2020. - T. 26. - № 3, – 258–274
21. Smejl S. (1972) Global`ny`j analiz i e`konomika, I. Optimum Pareto i obobshhenie teorii Morsa / Uspexi matematicheskix nauk, t. XXVII, vy`p. 3(165). – 177–187.
22. E`konomisty` i matematiki (1965) E`konomisty` i matematiki za krugly`m stolom 1965

Ключевые слова
двойственность, квазидифференциал, критическая точка, многообразие, равновесие

Козырев Анатолий Николаевич, к.ф.-м.н., д.э.н
Центральный экономико-математический институт РАН
ORCID 0000-0003-3879-5745,
kozyrevan@yandex.ru

Anatoly Kozyrev, The principle of duality in mathematical theory of general equilibrium

Keywords
duality, quasidifferential, critical point, manifold, equilibrium.

DOI: 10.34706/DE-2024-04-01
JEL classification C8 Методология сбора и оценки данных; компьютерные программы; O33 – Научно-технический прогресс: этапы и последствия; процесс распространения

Abstract
The article describes an approach to the mathematical theory of economic equilibrium based on the consistent application of the duality principle introduced by L.V. Kantorovich from functional analysis to convex analysis, linear programming and economics. It is shown that, following the principle of duality, it is possible to rewrite all the elements of known models of economic equilibrium in the language of conjugate spaces, conjugate cones and conjugate polyhedra. This makes it possible to clear the mathematical constructions used in the theory of AER from the plume of ideological dogmas, to give them a new interpretation in some cases and to use them effectively in the real economy.