1. НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 330.4, 519.8, 004.94

1.1. Принцип двойственности и вычисления в математических моделях экономики

Козырев А. Н., ЦЭМИ РАН, г. Москва, Россия

Показаны неиспользованные до настоящего времени в полной мере возможности математического моделирования и вычислений на основе принципа двойственности, привнесенного Л.В. Канторовичем из функционального анализа в выпуклый анализ, в линейное программирование и в экономику. Особое внимание уделяется вычислениям в условиях изначальной неполноты информации и появления дополнительных условий по мере решения задач на экстремум. В качестве иллюстраций использованы примеры из практики. Высказана авторская точка зрение на причины кризиса экономической науки в целом и экономико-математического направления в частности.

1. Введение

Принцип двойственности в математике – это рассмотрение пар объектов, связанных определенным образом (сопряженных). Самые близкие для нашей аудитории примеры – прямая и двойственная задачи линейного программирования, сопряженные выпуклые конусы. Чуть дальше – пространство непрерывных функций, определенных на метрическом компакте, и сопряженное к нему пространство мер, определенных на борелевских подмножествах того же компакта. Каждая мера определяет линейный функционал на пространстве непрерывных функций. В этом пространстве может быть задана перевозочная метрика Канторовича. Список можно продолжать, не уходя от тематики экономико-математического направления, если понимать его широко. Например, в работе [Васильев, 1998] обобщенное значение по Шепли – линейный оператор со значениями в K-пространстве, определенный на множестве неаддитивных функций множеств. Но бывают случаи и попроще, например, евклидово пространство самосопряженное, то есть сопряженное к нему такое же пространство.

Главная из намеченных целей – показать возможности применения принципа двойственности, заимствованного из функционального анализа и геометрии выпуклых многогранников, к решению задач в области экономики и организации производства (с применением математики). Конкретно речь идет о применении этого принципа к решению задач на экстремум, включая многоцелевую оптимизацию, к теории кооперативных игр в форме характеристической функции и к математическим моделям общего экономического равновесия (далее – ОЭР), а потом – к практическим задачам экономики и организации производства. Следование принципу двойственности позволяет переписать теорию ОЭР на языке двойственности, сопряженных пространств и конусов, избавляя её от токсичных следов идеологии и делая применимой на практике. Используемый подход – движение от практической задачи к её абстрактному образу и обратно («до числа») – отличительная черта ленинградской математической школы, берущей начало от Эйлера. Применительно к задачам экономики и организации производства этот принцип воплощен в работах Л. В. Канторовича (далее – ЭЛВЭ) и его учеников, работавших с ним в Ленинградском университете и в отделе приближенных вычислений ЛОМИ АН СССР, а потом МЭО СО АН СССР.

Следующая по порядку, но отнюдь не по важности цель – добиться не только внимания, но и понимания той части читательской аудитории, для которой излагаемые далее идеи и подходы, в основном восходящие к работам ЭЛВЭ, могут быть полезны именно сегодня. Ценность самих идей и подходов сомнению не подвергается, их оценили математики, хорошо знавшие и самого ЭЛВЭ, и его работы.

> *Важно то, что с высоты понимания тогдашнего функционального анализа, он, как и – почти одновременно – фон Нейман в США, сразу же осознал, что речь идет о применении основополагающих идей функционального анализа, в частности принципа двойственности, который ставит весь выпуклый анализ, созданное им линейное программирование и тем самым важную часть экономической науки на твердую основу. По мнению большинства математиков, это самое замечательное достижение Л. В.*
>
> *Цитируется по [Вершик, Кутателадзе, Новиков, 2012]*

Не оспаривая данную математиками оценку вклада ЭЛВЭ в экономическую науку, приходится признать, что экономисты оценивают его вклад несколько иначе, причем не только в части, касающейся применения идей функционального анализа, но и в части постановки на твердую основу самой экономической науки благодаря применению этих идей. Если о веяниях функционального анализа им судить трудно по объективным причинам, то о перманентном кризисе в экономической теории и экономической науке в целом они высказываются вполне компетентно. В общем и целом, речь идет о том, что формализация и математизация, на которые возлагались большие надежды с середины 50-х прошлого века, как минимум, до середины его 70-х годов, этих надежд не оправдали. Это касается как отечественной экономической науки времен СССР и позже, которую принято ругать, причем очень по делу, так и западной, которую до последнего времени было принято хвалить.

Как это получилось – очень интересный и непростой вопрос, но погрузившись в тему, можно сделать вывод о том, что все произошедшее, как минимум, логично. Экономисты, если говорить о них как о профессиональном сообществе, в целом оказались не готовы строить свою науку на той «твердой основе», которая вполне обычна для естественных наук. А математики, пришедшие было в экономическую науку на волне энтузиазма, характерного для середины 50-х годов прошлого века и отчасти для последующих двух десятилетий, в основном остались математиками со своими ценностями, снобизмом и нежеланием заниматься практическими задачами. Как ни парадоксально это выглядит или может показаться, сказанное в полной мере относится к авторам цитируемой выше статьи об ЭЛВЭ. Они понимали идеи ЭЛВЭ, ценили их, но предпочитали работать в чистой математике, хотя одному из них [А.М. Вершику] все же пришлось поработать в какой-то период и в прикладной математике. В этом смысле ЭЛВЭ интересен еще и как личность. В нем был не только талант математика, но и пассионарность.

Проблема понимания идей ЭЛВЭ сидит в деталях, для полного понимания которых важна вся триада – функциональный анализ, выпуклый анализ, линейное программирование. В литературе для широкого круга лиц, включая экономистов, идеи ЭЛВЭ изложены предельно просто, не только без обращения к функциональному анализу и без обучения очень непростому упражнению, которое приводит от дискретной по форме задачи к такой ее формулировке, когда она похожа на задачу линейного программирования. Сам ЭЛВЭ проходил этот путь, используя свои познания в функциональном анализе и геометрии, но для этого надо было их не только иметь, но и понять, как они здесь работают.

2. Начало

Чтобы ситуация стала понятней, надо обратиться к изложению подхода ЭЛВЭ в двух его довоенных работах [ЭЛВЭ, 1939, 1940], а потом в надиктованном им докладе предполагаемого выступления на заседании московского математического общества [ЭЛВЭ, 1986]. Брошюра [ЭЛВЭ, 1939] – доработанная стенограмма лекций для инженеров с подробным описанием пути от практической задачи организации производства к представлению её в виде геометрического образа, а потом к численному решению с применением теоремы отделимости и вычислительной схемы на основе двойственности.

Вторая работа – заметка в докладах академии наук [ЭЛВЭ, 1940]. В ней те же идеи изложены в терминах функционального анализа, но без ссылки на первую работу. Сделано это сознательно. В ожидании неизбежной войны ЭЛВЭ не хотел, чтобы его «практическая работа была использована вне страны» [ЭЛВЭ, 1986, с. 201]. Фактически это признание того факта, что переход от идей, изложенных в заметке 1940 года, к практической их реализации – достаточно трудная задача.

От практики к геометрическому образу и обратно (к числу)

В брошюре 1939 года очень подробно на простых примерах показаны принципы решения производственных задач, изначально формулируемых как дискретные. Все они приводятся к виду, когда рассматриваемая область выпукла, точнее, она принимает форму выпуклого многогранника относительно небольшой размерности. Максимум целевой функции достигается в точке на границе этой области, в той, где границу пересекает луч, выходящий из начала координат. Опорная гиперплоскость, проходящая через эту точку и отсекающая часть луча с более предпочтительными, но недоступными решениями. Описание этой гиперплоскости – решение двойственной задачи. Используя это решение, можно легко найти решение не только непрерывной задачи, но и исходной (дискретной).

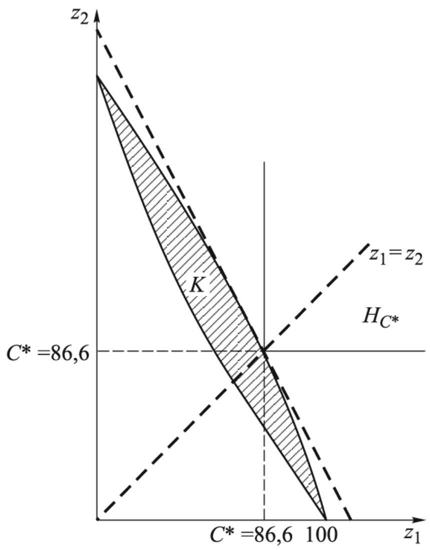

Рисунок 1. Источник (ЭЛВЭ.1939)

В примере, на основе которого сделан рисунок 1, задача заключается в оптимальной загрузке набора станков, способных производить различные детали. В этом примере номенклатура деталей включает всего две позиции. Для каждого станка I время его работы принимается за 1 и делится между производством первой детали h_{i1} и второй детали h_{i1}. Для каждого I имеем $h_{i1} + h_{i2}$ =1. В принципе номенклатура деталей может включать любое число позиций m. В нашем случае $m = 2$. Если станок i полностью занят производством детали k, где k принимает значения от 1 до m, то он производит α_{ik} деталей этого типа, если их производство на станке i невозможно, то $\alpha_{ik} = 0$. Каждой системе чисел h_{ik}, то есть распределению занятости всех станков, соответствует система чисел $z_k = \sum_i \alpha_{ik} h_{ik}$, где каждое z_k – общее количество деталей типа k. Векторы $(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ для всевозможных допустимых $\{h_{ik}\}$ заполняют выпуклое тело K. На рисунке 1 это заштрихованная часть плоскости. Острые концы получаемой фигуры соответствуют вариантам, когда все время всех станков тратится на изготовление одного вида деталей.

Поскольку для изготовления изделия нужно по одной детали каждого типа, число готовых изделий определяется минимальным z_k. По этой причине оптимальное решение – точка на луче, определяемом равенством $z_1 = z_2$. Эта прямая пересекает границу области K в точке C^*. Область H_{C^*} состоит из точек, соответствующих заведомо недостижимым результатам. Исключение – точка C^*. Через нее можно провести разделяющую гиперплоскость. Разрешающие множители λ_1 и λ_2 – компоненты вектора, ортогонального разделяющей гиперплоскости. Все это рассуждение может быть перенесено на случай произвольного m за исключением возможности нарисовать. Получаем множители $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, отвечающие каждой детали. Если для каждого i рассмотреть произведения $\lambda_1\alpha_{i1}, \lambda_2\alpha_{i2}, \cdots, \lambda_m\alpha_{im}$ и выделить те k, для которых произведение максимально, то для всех прочих k можно положить $h_{ik} = 0$. Содержательно это означает, что детали типа i на станке k не производятся. Фактически это и есть решение.

Взгляд на проблему из 1986 года

В докладе [ЭЛВЭ, 1986, с. 199–201] описан в самых общих чертах и практически без формул весь ход рассуждений от самого общего представления экономических задач до конкретных решений с применением разрешающих множителей, позже получивших название «о. о. оценки». Экономическую задачу в самом общем виде удобно представить цитатой.

> *Речь идет о классе задач на экстремум, в которых точка экстремума лежит на границе рассматриваемой области, Такие задачи характерны для экономики. Некоторый экономический процесс характеризуется двумя векторами: $x \in X$ — результаты процесса и $y \in Y$ — используемые ресурсы, X и Y — некоторые линейные пространства.*

Цитируется по [ЭЛВЭ, 1986, с. 200]

Тут хотелось бы отметить принципиальную значимость отличительного признака – «точка экстремума лежит на границе рассматриваемой области». Он касается не только задач линейного программирования, но и едва ли не всех экономических задач, за которыми стоит что-то реальное, а не «сказка» с использованием экономических терминов, чем грешит теория ОЭР. В граничных точках невозможно использовать традиционный признак экстремума – производная равна нулю. Потребовался принципиально иной подход, так появились разрешающие множители, потом линейное программирование, негладкий анализ [Demyanov, Rubinov 1995] и т.д.

В математической теории ОЭР, напротив, обычно предполагаются гладкость предпочтений и выбор точки внутри рассматриваемого множества (исключения есть, но суть не в этом). Вопрос может показаться чисто техническим, но это не совсем так, или совсем не так. К этому вопросу еще придется вернуться, но продолжим цитату.

> *Рассматривается множество реализуемых процессов T. Каждому значению параметра $t \in T$ отвечает некоторый процесс, характеризуемый его затратами и результатом (x_t, y_t). Множество $\{(x_t, y_t): T\}$ предполагается выпуклым, то есть вместе с каждой парой процессов в него входит и их усреднение. Точка (x_0, y_0) называется экстремальным состоянием процесса, если пересечение конуса положительных элементов с вершиной в этой точке с множеством $\{(x_t, y_t): T\}$ пусто. Экономически это означает, что не существует варианта процесса, в котором бы и результаты были больше $x \geq x_0$, и затраты меньше $y \leq y_0$.*

Цитируется по [ЭЛВЭ, 1986, с. 200]

Тут важно все, прежде всего, предельная общность постановки вопроса, включая определение упорядоченности через «конус положительных элементов». Два частных случая – оптимизация по скалярному критерию и по Парето. Таким же общим образом упорядоченность понимается в теории частично упорядоченных векторных пространств (К-пространства) и в работах [Вершик, Черняков, 1982a, 1982b], где анонсирована программа обобщения математической экономики и теории экстремальных задач на основе принципа двойственности. Там же развита теория полей выпуклых многогранников и доказана гипотеза Смейла о строении множества критических по Парето точек [Смейл, 1972]. Анонсированная программа не была реализована полностью, а обещанная серия статей так и не появилась в силу личных причин авторов. Тем не менее направление было задано и представляется очень перспективным, в том числе с точки зрения вычислительной математики, хотя изложение основных идей в этих работах крайне абстрактно, как и в заметке [ЭЛВЭ, 1940].

Математическая Теория ОЭР на основе принципа двойственности

Смейл свою программу, намеченную в постановочном докладе 1971 года, практически сразу[1] переведенном и опубликованном на русском [Смейл, 1972],], реализовал полностью в серии работ под общим названием Global analysis and economics, вышедших в период 1972–1976 гг. Они интересны тем, что в них теория ОЭР рассматривается с позиций глобального анализа, то есть без «сказок» и, что очень

[1] до его публикации [Smale,1973] на английском языке

важно, со здравым пониманием соотношения сравнительной статики и динамики [Smale, 1976]. Дело в том, что предельным ценам логично сопоставлять обмен в таком же предельном, то есть в инфинитезимальном объеме. Именно это предлагается в его работе 1976 года. При таком повороте многие трудности математической теории экономического равновесия уходят, не попрощавшись. Вместе с их уходом исчезает экономический смысл изящных теорем о конечности числа равновесий и о сходимости ядра большой экономики к равновесию. Возможно, об этом не надо жалеть, а поискать новый смысл.

Понимание цен как двойственных переменных в теории ОЭР и в публикациях по вопросу о числе равновесных состояний отнюдь не превалирует, скорее, наоборот. Оно даже в принципе могло появиться никак не раньше, чем функциональный анализ и линейное программирование, то есть не раньше середины XX века, тогда как понимание равновесных цен как результата «нащупывания» (tâtonnement) в условиях совершенной конкуренции появилась почти на век раньше. В знаменитом труде Леона Вальраса, относительно недавно переведенном на русский язык [Вальрас, 2000], этот термин встречается 57 раз в разных контекстах и с разной подробностью описания самого процесса. Можно с уверенностью утверждать, что речь идет о воображаемом процессе, имеющем место до совершения обмена или до начала производства [Вальрас, 2000, сс. 17,180]. Такое предположение неявно присутствует в моделях обмена, где цена набора продуктов, потребляемого каждым участником обмена, равна цене его начальных запасов. Оно же неявно присутствует в модели Эрроу-Дебре и многих других моделях ОЭР, хотя о процессе «нащупывания» авторы публикаций предпочитают не говорить и сам термин не употреблять. В том же источнике сказано, что «при режиме свободной конкуренции это нащупывание происходит естественным образом, поскольку при таком режиме цену услуг повышают, когда спрос больше предложения, и понижают, когда предложение больше спроса» [Вальрас, 2000, 190]. Остается заменить слова «это нащупывание» чем-то типа «достижение равновесия», и будет современная трактовка, но остаются бюджетные равенства и восходящая к Вальрасу интерпретация, а динамика подразумевается, оставаясь за пределами статичной по сути модели. Здесь трудно не заметить логического противоречия, если смотреть на модель непредвзято. Особенно ярко это противоречие видно при рассмотрении вопроса о совпадении ядра и множества состояний равновесия в больших экономиках.

С точки зрения математика «логическая стройность и математическая строгость» теории Вальраса не так уж далеко ушли от теории Маркса. А идеологическая составляющая в ней не просто присутствует, а доминирует. Просто она имеет принципиально иную направленность. Никакого взаимодействия субъектов в модели Вальраса нет, есть именно гипотеза, или «сказка» о том, что такое состояние достигается в результате некоторой процедуры «нащупывания», напоминающей аукцион. Строго говоря, нет и модели с полным набором условий существования решения и приписываемых ему свойств. Все это появилось много позже и полностью оформилось в математическую теорию примерно через сто лет усилиями многих математиков, сохранив при этом родимые пятна исходной идеологии.

Особое внимание к работам С. Смейла в настоящей работе – продолжение линии, заявленной в [Вершик, Черняков, 1982a, 1982b], где особо отмечена его попытка впервые систематически использовать идеи современного глобального анализа для исследования теоретико-игровых динамических проблем математической экономики.

В том же докладе Смейл обобщил понятие оптимальности по Парето, заменив понятие границы Парето более общим понятием множества критических по Парето точек, сформулировал гипотезу о строении множества таких точек в задаче оптимизации по m критериям на многообразии размерности $n \geq m$. Согласно его гипотезе, это множество – многообразие с углами, размерности $m-1$.

В исходной гипотезе Смейла, доказанной в [Вершик, Черняков, 1982b] и получившей статус теоремы, нет привязки понятия критической по Парето точки к модели обмена. Такая привязка появляется в работах Смейла лишь в качестве примера, а в цитируемых здесь работах Вершика и Чернякова ее вообще нет. В статье [Вершик, Черняков, 1982a] речь идет о гладком отображении $\varphi: X \to R^m$, где X -- гладкое n-мерное многообразие без края. Уточненная формулировка утверждения о структуре критических по Парето точек звучит так: если $n > 2m-4$, то для почти всех φ множество $\theta(\varphi)$ – подмногообразие с углами в X. Добавление $m-1$ дополнительного условия, формулируемых на языке двойственных переменных, приводят к ситуации, когда из этого многообразия выделяется дискретное подмножество. На этом строятся теоремы о конечности числа равновесий. Двойственные переменные можно считать ценами, но с определенной осторожностью в интерпретации. Если речь идет о модели обмена, то эти дополнительные $m-1$ ограничение – баланс. В более сложных моделях содержательный смысл обязательно есть, но его надо увидеть, как было с разрешающими множителями, ставших ценами.

Наконец, в [Smale, 1976] тем же Смейлом описан естественный вариант внесения динамики в модель обмена, а именно, предполагается, что обмены совершаются непрерывно в инфинитезимально малых объемах по ценам, выгодным всем участникам обмена. В итоге траектория состояний приходит к одной из критических по Парето точек. В таких точках градиенты критериев (функций полезности) «пропорциональны вектору цен», то есть совпадают между собой с точностью до множителя. В этой ситуации выгодный для всех инфинитезимальный обмен невозможен, а это и есть определение критической по Парето точки.

В примере из [Смейл, 1972] функция φ задана на многообразии $W \subset R^{lm}$, состоящем из точек вида $x = (x_1, \dots, x_m)$, где $x_i \in R_+^l$ для любого i от 1 до m и выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} w_i, \qquad w_i \in R_+^l,$$

где w_i интерпретируется как начальный запас продуктов у агента i, соответствующая координата векторной функции $\varphi = (\varphi_1, , , \varphi_v)$ – как его функция полезности, приведенное выше равенство – как продуктовый баланс. Выгодный для всех агентов обмен, то есть изменение x с сохранением левой части равенства невозможно совершить, если градиенты всех функций φ_i коллинеарны или, что то же самое, пропорциональны некоторому вектору p, именуемому вектором цен. Но именно это условие в данном случае определяет множество критических по Парето точек.

Но обмен обычными продуктами не исчерпывает тему. Вместо баланса обычных продуктов можно рассмотреть баланс научных разработок в том ключе, как это делалось в [Макаров, 1973, 1976],

$$\max_i y_i = \max_i z_i,$$

то есть интерпретировать x_i как уровень развития различных разработок, необходимые агенту i, а z_i как уровень развития различных разработок, которые он готов поставить другим агентам.

Также определенный интерес представляет его обобщение понятия полуравновесия, когда требование оптимальности заменяется более слабым требованием пропорциональности двух векторов, один из них – вектор цен, второй – градиент функции полезности [Smale, 1974a, 1974b]. Этот шаг можно продолжить, используя элементы негладкого анализа. Вместо гладких функций можно использовать кусочно-гладкие функции, получаемые в виде поточечного минимума набора гладких функций. Кроме того, можно вообще не использовать функции полезности, а использовать поля многогранников.

Определение 1. Пара $(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}) \in P_+^L \times X(\mathbf{w})$ – равновесие рынка $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$, если выполняются следующие условия.

$$(E1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \bar{p} \cdot \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{p} \cdot w_i$$

$$(E2) \qquad \bar{p} \cdot \bar{x}_i \le \bar{p} \cdot w_i \qquad i \in M$$

$$(E3) \qquad u_i(\bar{x}_i) = \max\{u_i(x_i) | x_i \in \mathbb{R}_+^l, \bar{p} \cdot x_i \le \bar{p} \cdot w_i\} \qquad i \in M$$

Первое уравнение (E1) —закон Вальраса. Когда $\bar{x}_i \ge 0$, $w_i \ge 0$ для каждого i, это равенство подразумевает выполнение условий.

$$(F1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^k \ne \sum_{i=1}^{m} w_i^k \Rightarrow \bar{p}^k = 0 \qquad k \in L$$

$$(F2) \qquad \bar{p} \cdot \bar{x}_i = \bar{p} \cdot w_i \qquad i \in M$$

Условие (E3) можно заменить более слабым условием$(F3)$.

$(F3)$ для каждого $i \in M$ существуют $\bar{\mu}_i \in R_+$ и $\bar{\alpha}_i \in P_+^{K_i(x_i)}$ такие, что

$$\left[\bar{\mu}_i \bar{p} - \sum_{j \in K_i(x_i)} \alpha_{ij} \nabla v_{ij}(\bar{x}_i)\right] \in \Gamma^+(\bar{x}_i),$$

где $P_+^{K_i(x_i)}$ – единичный симплекс в $\mathbb{R}_+^{K_i(x_i)}$, а $\Gamma^+(\bar{x}_i)$ – конус, сопряженный конусу, касательному $\mathbb{R}_+^l$ в точке $\bar{x}_i$.

Условие $(F3)$ – существенное обобщение полуравновесия по Смейлу. Здесь использование функций полезности – шаг навстречу Смейлу. Предпочтения экономических агентов можно задавать, используя поля многогранников или конусов. Про наблюдаемость можно говорить только в конкретных случаях. Сказку о том, что «наблюдаемы поверхности безразличия» [Debreu,1972] можно оставить тем, кто очень хочет в это верить.

Ключевая особенность класса задач – оптимум на границе выпуклой области

Не менее важно обратить внимание на предполагаемую выпуклость множества $\{(x_t, y_t): t \in T\}$. Как уже говорилось выше, экстремальные решения в задачах рассматриваемого класса имеют общую особенность – точка экстремума «лежит на границе рассматриваемой области». Тут можно увидеть противоречие с тем, какие задачи реально рассматривались в брошюре [ЭЛВЭ. 1939]. В цитате «рассматриваемая область выпукла», хотя в исходной постановке задача фанерного треста дискретна, как и другие рассматриваемые в брошюре [ЭЛВЭ, 1939]. Увидеть в них выпуклость помог подход с позиций функционального анализа.

Между тем различия в решении выпуклых и целочисленных задач математического программирования принципиальны. Целочисленные задачи при малом числе допустимых вариантов решения тривиальны, а при большом – практически неразрешимы. Количество возможных вариантов растет экспоненциально. Обычно такая задача не поддается решению, если нет каких-то возможностей отбросить большую часть возможных вариантов с самого начала, не рассматривая их как реально возможные.

В задачах рассматриваемого ЭЛВЭ класса такая возможность реализуется путем погружения множества всех возможных решений в выпуклую область сравнительно небольшой размерности, тогда как число возможных вариантов может быть на несколько порядков больше. В задаче по загрузке станков разного типа размерность такой выпуклой области равна количеству типов обрабатываемых деталей. В задаче фанерного треста номенклатура выпускаемых деталей насчитывает 8 типов. При этом количество теоретически возможных вариантов в задаче фанерного треста – миллиарды. В иллюстративном примере [ЭЛВЭ, 1939] их всего 2, что позволяет построить чертеж (иллюстрацию) на плоскости, но нет проблемы с решением путем простого перебора вариантов. А это сбивает интуицию (не у ЭЛВЭ).

Решение практической задачи как процесс уточнения условий

Еще одно важное обстоятельство в понимании позиции ЭЛВЭ заключается в представлении им решения экономической задачи на экстремум как процесса. Практические задачи на экстремум могут уточняться и часто уточняются в ходе их решения. В ходе решения обнаруживаются дополнительные ограничения, понимавшиеся постановщиками задачи как само собой разумеющиеся, или открываются дополнительные возможности. Такие уточнения постоянно происходили в практике сотрудников ЭЛВЭ из отдела приближенных вычислений ЛОМИ, занимавшихся оптимизацией производственных процессов на заводах Ленинграда в конце 40-х и в начале 50-х годов прошлого века. Тогда еще не было доступных ЭВМ, пригодных для решения таких задач. Расчеты проводились вручную, часто с применением подручных инструментов, это был живой процесс. После появления относительно мощных ЭВМ этот живой процесс никуда не ушел. Так было при решении практических задач в 60-х – 80-х годах в МЭО ИМ СО АН СССР. То же происходит при попытках решать задачи планирования на современных ЭВМ. Учесть все условия заранее проблематично, да и не нужно. Так было, когда «все началось с фанеры», то есть с задачи фанерного треста, когда ЭЛВЭ увлекся экономикой, так оно остается и сейчас.

3. Автоматизация принятия решений в 70-х. Госплан и АСУ

Описанные сложности проявились при построении и использовании автоматизированных систем управления (АСУ). Вокруг этой проблематики и сопутствующей истории накопилось много мифов или, если угодно, разных интерпретаций событий того периода. Разные люди видели совершенно разные стороны процесса и соответственно его описали в своих воспоминаниях.

Взгляд из Госплана на роль АСУ

Вот, например, взгляд Э. Б Ершова[1] из НИИ Госплана.

> *АСУ были инструментом торговли предприятий и отраслевых ведомств с вышестоящими уровнями управления. Только для этого АСУ были им нужны. Я сам видел, как приезжали ходоки в Госплан и привозили распечатки с ЭВМ, полученные с помощью АСУ. В Госплане говорили: “Ну что у вас, обычная муть, или муть с применением?”*

Дальше идет объяснение Эмилем Борисовичем такой позиции, а еще чуть дальше он намного смягчает сказанное.

> *АСУ – это не система управления, это была система, которая в лучшем случае приводила в порядок нормативы, инвентаризировала расходы, наличные ресурсы, проводило каталогизацию. И это было правильно. Эта система могла дать полезное что-то внутри предприятия. И это было. Но все зависело от внешних ограничений – АСУ могла работать, а могла не работать. Но наводить какой-то порядок в собственных делах она помогала.*

А дальше еще одно замечание, хорошо согласующееся со сказанным выше об ограничениях и возможностях, не часто учтенных в исходной постановке задачи. Второе предложение цитаты ниже ровно об этом.

> *А во внешней среде у АСУ была только одна функция – отстаивать интересы нижнего звена перед верхними. И при этом не раскрывать полностью свои возможности.*

Сказано весной 1999 года о том, что происходило в 70-х, но актуальность не потеряло ни для сегодняшнего бизнеса, ни для тех, кто сегодня пытается разобраться в истории экономико-математического направления и АСУ. Существуют совершенно разные точки зрения на пользу АСУ, причем тоже на основе собственного опыта. В данном контексте особенно интересно то, что и тогда «не раскрывать полностью свои возможности» было общим правилом, как и сегодня. Но тогда говорить о нем категорически не было принято. Сегодня скорее есть крен в другую сторону, но суть не в этом, а в том, что были и остаются интересы, возможности и ограничения, не раскрываемые сразу без крайней необходимости.

[1] http://www.sapov.ru/staroe/si06.html Последнее обращение 5 сентября 2025.

Отраслевой уровень

На отраслевом уровне предприятия или научно-производственные объединения (далее – НПО) «торговались» в указанном Эмилем Борисовичем смысле со своим министерством, предоставляя для подтверждения своих доводов распечатки решения задач по оптимизации планов на будущее. А министерство торговалось с Госпланом и Совмином. Эти наблюдения Ершова в целом подтверждаются опытом работы с блоком «Перспективное планирование» АСУ-Прибор. Но выводы из опыта не столь однозначны. В какой-то мере это можно показать на примере АСУ-Прибор.

В середине 70-х, когда разрабатывалась и одновременно начинала эксплуатироваться АСУ-Прибор, в Министерстве приборостроения СССР было 76 НПО. Номенклатура распределяемых между ними ресурсов состояла из двух крупных блоков – «капитальное строительство» и «оборудование». Объемы того и другого выражались в деньгах, но под эти деньги предполагалось получение материальных ресурсов, в пределах имеющихся лимитов. Об этой системе распределения стоит сказать несколько слов.

Ресурсы распределялись с использованием лимитов, то есть помимо оплаты ресурсов деньгами, нужно было иметь разрешение на их приобретение в рамках выделенного ограничения сверху – лимита. Эти лимиты распределялись между хозяйственными субъектами сначала на верхнем отраслевом уровне и далее вниз, вплоть до предприятий. Дробление было достаточно детальным, но в данном блоке АСУ-Прибор использовалась схема с делением только на 2 вида. Необходимость в лимитах была связана с несбалансированностью (дифференциацией) цен в зависимости от решаемых задач. В научной среде было принято иронизировать по поводу лимитов, тогда как следовало их изучать, используя функциональный анализ в частично упорядоченных пространствах, Но этот шанс упущен.

Один из вопросов, которые должен был решать блок «Перспективное планирование» – обоснование перед вышестоящими органами своих потребностей в ресурсах на развитие, второй вопрос – распределение ресурсов между НПО. Задача, решаемая министерством, состояла в том, как распределять между НПО те ресурсы, которые предполагалось получить на развитие отрасли. Содержательно выбор заключался в том, давать ли больше средств туда, где ожидался больший эффект, или туда, где нужно было «расшить узкое место». И, разумеется, предполагалась оптимизация с применением численных методов там, где это было возможно.

Выбор для реализации в АСУ-Прибор был сделан в пользу «расшивания узких мест». Формальная реализация такого выбора изначально состояла в распределении ресурсов обратно пропорционально двойственным оценкам, рассчитанным для отдельных НПО. Такое решение было весьма спорным, поскольку результат получался заведомо неоптимальным по Парето. Больше ресурсов шло бы в «узкое место», но не в тех пропорциях, которые ему были нужны. Также не в лучших пропорциях получали ресурсы и другие НПО. При распределении единственного ресурса (денег) такой проблемы, разумеется, не бывает, но в реальном планировании приходится распределять более двух наименований имеющихся ресурсов.

Оптимизация распределения ресурсов без запроса «лишней» информации

Чтобы решить проблему, была использована простая, но достаточно эффективная процедура обмена выделяемыми ресурсами между НПО, не требующая от них дополнительной информации об имеющихся резервах и потому совместимая со стимулами. Её основа – хорошо известный на сегодняшний день признак оптимальности по Парето в задаче распределения ограниченных ресурсов. Суть его в том, что двойственные оценки ресурсов для всех подзадач (то есть для всех НПО) должны быть, как векторы, коллинеарны или, что то же самое, пропорциональны некоторому положительному «вектору цен». Если это условие не выполняется, соответствующий блок АСУ рассчитывает по формальной процедуре направление обмена, выгодное для всех участников [Козырев, 1975]. Если это подтверждается, то происходит выгодный для всех обмен. Он ненулевой в силу линейности задачи, но совершатся в ограниченном объеме, то есть до точки, когда дальнейший обмен в тех же пропорциях станет невыгодным кому-то из участников. При достижении такого состояния двойственные оценки должны быть пересчитаны заново. В принципе это означает пересчет задачи линейного программирования для, как минимум, одного участника. Здесь это какое-то НПО, а задачи для них всех решались на уровне отрасли, но возможны варианты, когда каждое НПО решает задачу для себя само и представляет наверх результаты, включая свои оценки ресурсов. Так или иначе, дополнительная информация об ограничениях или резервах подается наверх, когда в этом заинтересовано само НПО.

Если смотреть на задачи линейного программирования, решаемые в НПО, как на функции от ресурсов, то получается набор кусочно-линейных функций, получаемых как поточечный минимум набора линейных функций. Вместо линейных функций можно рассматривать гладкие. Получаемая функция – поточечный минимум набора гладких функций. Кусочно-линейные и гладкие функции представляют собой два ее частных случая. Это позволяет с единых позиций рассматривать сюжет, описанный выше, и сюжет, представленный в [Smale, 1976].

Сюжет, предлагаемый в [Smale, 1976] – попытка ввести в модель динамику, но интересен он еще и тем, как определяются цены и направление движения к границе Парето в каждой точке пути, или (иными словами) в каждый момент времени. Если на момент t состояние $x(t) = \left(x_1(t), \dots, x_m(t)\right)$ не является оптимальным по Парето, то для каких-то i и j найти подходящий вектор обмена достаточно просто. Можно сложить векторы $\nabla u_i(x_i(t))$, в качестве $p(t)$ взять нормализованную сумму, то есть

$$p(t) = \sum_{i=1}^{m} \nabla u_i(x_i(t)) \Bigg/ \sqrt{\langle \sum_{i=1}^{m} \nabla u_i(x_i(t)), \sum_{i=1}^{m} \nabla u_i(x_i(t)) \rangle}. \qquad (1)$$

Направление обмена для каждого i можно получить по формуле

$$\Delta x_i(t) = \nabla u_i(x_i(t)) - \mu_i p(t), \;\; \mu_i = \langle \nabla u_i(x_i(t)), p(t) \rangle .$$

Тогда $\langle \nabla u_i(x_i(t)), \Delta x_i(t) \rangle > 0$ для каждого i, а сумма $\Delta x_i(t)$ по всем i равна нулю. Иначе говоря, вектор $(\Delta x_1(t) \dots . \Delta x_m(t))$ – направление инфинитезимально малого обмена.

Изложенная выше схема с некоторыми поправками распространяется на случай, когда функции u_i кусочно-гладкие. Тогда при некоторых t функция u_i для каждого i имеет вид

$$u_i(x_i(t)) = \min_j v_{ij}(x_i(t)), \;\; j \in J_i(x_i(t)),$$

где v_{ij} для всех i и j – гладкие функции. Функции u_i указанного вида квазидифференцируемы, причем квазидифференциал в точке $x_i(t)$ представим в виде $(\overline{\partial} u_i(x_i(t)), 0)$, где $0 \in R^l$ – субдифференциал, а

$$\overline{\partial} u_i(x_i(t)) = co\{\nabla v_{ij}(x_i(t)), j \in K_i(x_i(t))\}.,$$

– супердифференциал u_i в $x_i(t)$, где набор $K_i(x_i(t)) \subset J_i x_i(t)$ задан условием

$$K_i(x_i(t)) = \{j \in J_i | v_{ij}(x_i(t)) = u_i(x_i(t))\}.$$

Смысл выделения подмножества $K_i(x_i(t))$ состоит в том, что ненулевые множители могут иметь градиенты функций v_{ij} только с минимальными значениями [Demyanov, Rubinov, 1995].

Решая задачу квадратичного программирования

$$\sum_{i=1}^{m} \langle g_i - \gamma_i p, g_i - \gamma_i p, \rangle \to min, \;\; g_i \in \overline{\partial} u_i(x_i(t)), \gamma_i \in R_+ \; \forall i; p \in R_+^l, \qquad (2)$$

получим вектор цен $p(t)$ и набор коэффициентов $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$, для которых выполняются условия

$$\langle g_i(t) - \gamma_i(t) p(t), g_i \rangle \geq 0 \; \forall g_i \in \overline{\partial} u_i(x_i(t)), \sum_{i=1}^{m} (g_i(t) - \gamma_i(t) p(t), g_i) = 0, \qquad (3)$$

причем для некоторых i неравенства строгие. Точнее, в ситуации общего положения, достижимого сколь угодно малым «шевелением», неравенства строгие для всех i. Иначе говоря, получается направление обмена $(\Delta x_1(t) \dots . \Delta x_m(t))$, где $\Delta x_i(t) = g_i(t) - \gamma_i(t) p(t)$, улучшающее положение всех агентов.

Разумеется, такая схема приводит к выгодному для всех сторон обмену и (в конечном счете) к оптимальному по Парето распределению ресурсов только в предположении, что пропорции двойственных оценок достоверны. Но именно благодаря этому достигается совместимость со стимулами, в том числе, при наличии скрытых интересов.

Примечательно здесь то, что в исходной постановке задача планирования представлялась как целочисленная. Возможные варианты развития генерировались автоматически на основе имеющихся данных, нормативов и целей развития. Здесь есть определенное сходство с теми задачами, что пришлось решать ЭЛВЭ в 1939 году, а решали её на основе ранее накопленного под его руководством опыта сотрудники созданного им Математико-экономического отделения Института математики СО АН СССР. Как и в 1939 году, дискретные задачи всех НПО заменялись на задачи линейного программирования, решаемые автономно, при имеющихся ограничениях по ресурсам и других ограничениях. Иначе говоря, опыт 1939 года для решения задач на отдельном предприятии был достаточно успешно перенесен на уровень отрасли и повторен еще в двух министерствах [Бендиков, 2025].

4. Принцип двойственности в теории кооперативных игр

В наиболее общей форме применение принципа двойственности к теории кооперативных игр, вероятно, представлено в статье [Васильев, 1998], где значение по Шепли рассматривается как линейный оператор со значениями в частично упорядоченном пространстве. Принцип двойственности здесь состоит в одновременном рассмотрении пространства неаддитивных функций (игр), определённых на некоторой σ-алгебре, элементы которой именуются коалициями, и линейных операторов, переводящих неаддитивные функции в аддитивные, определенные на той же σ-алгебре и удовлетворяющие некоторому набору дополнительных требований. В таком виде можно рассматривать, прежде всего, значение по Шепли для кооперативных игр в форме характеристической функции как с конечным множеством игроков, так и бесконечномерные обобщения этой концепции [Ауман, Шепли, 1977]. С точки зрения практики столь высокий уровень абстракции, вероятно, излишен.

Реальные задачи, причем не только в экономике, практически всегда дискретны, а количество элементов в них конечно, Будь то количество атомов в видимой вселенной, количество молекул воды в стакане или количество игроков в кооперативной игре с побочными платежами, число элементов в каждом случае конечно, число возможных сочетаний этих элементов тоже конечно. Теоретически все эти варианты можно рассмотреть, если не вручную, то с применением мощной ЭВМ. Но этот путь тупиковый.

Переход от рассмотрения игры с конечным числом игроков к игре, где коалиции – элементы какой-то σ-алгебры, бывает полезен, как в механике сплошных сред рассматривается континуум, а не конечный набор молекул. В математической экономике такой подход тоже применяется и даже удостоился упоминания в качестве одного из четырех важнейших аспектов теории ОЭР {Debreu, 1974]. В конкретном случае речь идет о совпадении равновесия и ядра больших экономик. Этот факт интерпретируется как достижение условий совершенной конкуренции при бесконечном числе участников торга и, как следствие, достижение состояния равновесия.

Но возможен совершенно иной подход к тому же математическому факту, он связан с вычислениями и в чем-то аналогичен подходу, использованному ЭЛВЭ в примере с загрузкой станков. Также, как и задачах, рассматриваемых в [ЭЛВЭ, 1939], ситуация с малым числом участников игры задача кажется тривиальной или почти такой, но с ростом их числа, количество вариантов, которые надо рассмотреть, растет очень быстро. Решение становится неподъемны, если в задаче нет какой-то специфики. А специфика может быть выявлена, если иметь представление о практических задачах, которые надо решать, и достаточно большой запас математических инструментов, из которых можно выбирать подходящий.

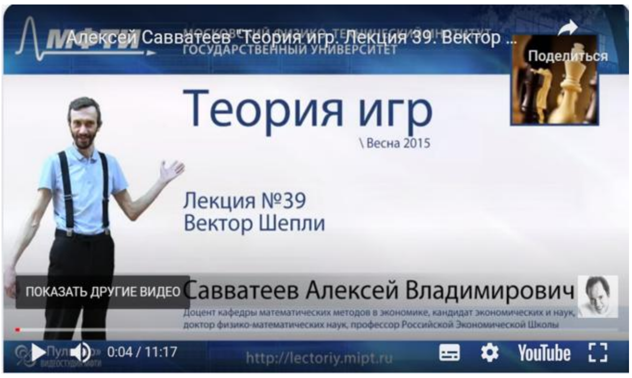

Рисунок 2. Кадр из лекции А. савватеева

Вообще говоря, речь идет о дележах, причем результат дележа, но не процедура, понимается как кооперативная игра многих лиц с побочными платежами. Дележи здесь понимаются достаточно широко, это могут быть и распределение выигрыша между участниками некоторой кооперативной игры, где участники – физические лица, как в примере из лекции Алексея Саватеева, и распределение стоимости портфеля интеллектуальных прав между его компонентами в целях бухгалтерского учета как нематериальных активов, [Костин, Неволин, 2023], и более сложные конструкции, возникающие в процессе переговоров о долях участников инвестиционного проекта, когда вклады вносятся в различной форме, а доли в проекте надо определить в одинаковой для всех форме, то есть не обязательно в деньгах, но точно не в «полезности», которая индивидуальна для каждого участника [Козырев, 2016]. Более того, вклад каждого из участников проекта может состоять из нескольких компонентов, состав которых может меняться по ходу переговоров, формально это можно представить как изменение состава участников игры. В работе [Неволин, 2023] уточнены некоторые подходы к объединению в одну «игру» результатов разных проектов

Чтобы сформулировать аксиомы Шепли и показать их упрощение, получаемое благодаря предлагаемому подходу, нам потребуются дополнительные обозначения. Удобнее всего взять стандартные обозначения и формулировки из популярного в прошлом учебника по теории игр [Оуэн, 1971].

Игра с конечным числом игроков n понимается как функции v, определенной на множестве всех коалиций (подмножеств множеств $N = \{1,2,\dots,n\}$, Её значение $v(\boldsymbol{S})$ на множестве $\boldsymbol{S}$ понимается как максимальный возможный для коалиции $\boldsymbol{S}$ выигрыш при объединении усилий. Носителем функции $\boldsymbol{v}$ называется $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{N}$, удовлетворяющее условию

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T}) \quad \forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N},$$

Символ $\boldsymbol{\pi}$ означает перестановку $\boldsymbol{N}$, а функция $u: 2^N \to R$ получается как

$$\boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{i_1}), \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{i_2}), \dots, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{i_s})\big) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) \quad \forall \boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \dots, \boldsymbol{i_s}\}.$$

Функция $\boldsymbol{\pi v}$ отличается от функции $\boldsymbol{v}$ лишь тем, что элементы множества $\boldsymbol{N}$ поменялись ролями в соответствии с перестановкой $\boldsymbol{\pi}$.

Аксиомы Шепли. Под вектором значений (решением по Шепли) для $\boldsymbol{v}$ будем понимать **n**-мерный вектор $\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{\varphi_1}[\boldsymbol{v}], \dots, \boldsymbol{\varphi_n}[\boldsymbol{v}]$**)**, удовлетворяющий аксиомам:

S1. Если $\boldsymbol{S}$ – любой носитель $\boldsymbol{v}$, то

$$\sum_{i \in S} \boldsymbol{\varphi_i}[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})$$

S2. $\forall \boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N}$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{\varphi_{\pi(i)}}[\boldsymbol{\pi v}] = \boldsymbol{\varphi_i}[\boldsymbol{v}].$$

S3. Если $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$ – две любые игры, то

$$\varphi[\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}]=\varphi[\boldsymbol{v}]+\varphi[\boldsymbol{u}].$$

Смысл каждой из аксиом достаточно понятен, если разобраться с формальными обозначениями. Первая аксиома означает то, что рассматриваются именно дележи. Вторая аксиома означает принцип анонимности [Мулен, 1975]. Он совсем очевиден для простейших функций, когда есть такое множество S , что любое $\boldsymbol{T}\supset\boldsymbol{S}$ является носителем $\boldsymbol{v}$, а на остальных подмножествах функция v принимает нулевые значения. В общем случае он тоже понятен, но не так. Аксиома S3 не вызывает сомнения, если смотреть на нее с позиций функционального анализа, более того, её можно заменить требованием линейности оператора $\boldsymbol{\varphi}$, хотя с игровых позиций ее можно подвергнуть сомнению.

Теорема (Шепли). Аксиомы S1 – S3 однозначно определяют значения φ для всех игр, доля игрока $\boldsymbol{i}$ определяется как

$$\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}[\boldsymbol{v}]=\sum_{S\subset N;S\ni i}\frac{(\boldsymbol{s}-\mathbf{1})!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s})!}{\boldsymbol{n}!}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\backslash\{\boldsymbol{i}\})],$$

где

$\boldsymbol{s}$ – число элементов в коалиции $\boldsymbol{S}$,

$\boldsymbol{n}!$ произведение всех чисел от 1 до n,

$\boldsymbol{S}\backslash\{\boldsymbol{i}\}$ – множество всех элементов из $\boldsymbol{S}$ за исключением $\boldsymbol{i}$.

Здесь $\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ – вероятность появления коалиции $\boldsymbol{S}$, если формирование коалиций происходит случайным образом, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\backslash\{\boldsymbol{i}\})$ – вклад игрока $\boldsymbol{i}$ в выигрыш $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})$ коалиции $\boldsymbol{S}$.

Достаточно легко проверить, что получаемый по этой формуле вектор $\varphi[\boldsymbol{v}]$ удовлетворяет аксиомам S1 – S3. Также следует заметить, что вероятностная интерпретация формулы, определяющей вектор Шепли, может быть заменена другой, построенной на принципе анонимности S2 и сложения игр S3.

В примере, приведённом в Лекции А. Савватеева, число игроков равно трем, а вероятностная интерпретация кажется вполне логичной. Не столь логичной она представляется, когда игроки не присоединяются к группе в случайным порядке, а делят собственность, например большую квартиру. Такие решения реально принимаются с применением решения по Шепли, о чем А. Савватеев тоже говорил.

Но все это касается ситуаций, когда число участников достаточно мало или очень специальных случаев, например

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{i},\mathbf{1})=\mathbf{1}\&\boldsymbol{v}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})=\mathbf{0}\ \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\neq\mathbf{1}\Rightarrow\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{1}}[\boldsymbol{v}]=\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}}.$$

Агент с номером $\boldsymbol{i}\neq\mathbf{1}$ получит $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ с вероятностью $\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}$**.** Зато агент с номером 1 получает $\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}}$**,** то есть все остальное. Впрочем, так получается и без вероятностей. У игрока с номером 1 здесь просто сильная позиция, он может легко оказаться т сделки, если у него есть много других вариантов, а у игроков с номерами $\boldsymbol{i}\neq\mathbf{1}$ вариантов ало, точнее, один.

Наиболее интересным с точки зрения практики и применимости принципа двойственности представляется промежуточной случай, когда есть конечное, но большое множество «игроков» и практически необозримое число возможных коалиций. В таких условиях о построении характеристической функции для всего множества возможных коалиций не может быть и речи, о точном решении задачи дележа – тем более. Тем не менее, требуется (и это реально возможно) построить приблизительное решение, которое с определенными основаниями можно считать достаточно точным. На практике, как ни парадоксально это звучит, такое вполне реально!

Ключ к решению задачи обеспечивает математическая техника, разработанная в рамках теории полиномиальных функций множеств [Рубинштейн Г.Ш., 1973], то есть неаддитивных функций, представимых в виде диагонального сечения функции m переменных, являющейся мерой по каждой их своих переменных при фиксировании остальных. Формально это можно записать в виде

$$\boldsymbol{v}(e)=\psi(e,e,\dots,e),e\in B,$$

где B – σ-алгебра, функция φ определена на B, а функция ψ – на B^m, причем она σ-аддитивна по каждому аргументу. Здесь m – степень функции $\boldsymbol{v}$.

В конечномерном случае, когда число «игроков» равно n, а функция $\boldsymbol{v}$ определена на 2^N, то есть на всех подмножества $N=\{1,2,\dots,n\}$, её всегда можно представить как полиномиальную меру степени n. В этом случае понятие полиномиальной меры теряет содержательный смысл, как и в случае $m=1$. Интерес представляют варианты $n\gg m>1$ и $n>m>1$.

Техника, развитая в теории полиномиальных мер, позволяет представить каждую игру $\boldsymbol{v}\colon 2^N\to R$ в виде

$$\boldsymbol{v}=\sum_{T\in 2^N}\boldsymbol{v}_T,$$

где функция φ_T для каждого $S\in 2^N$ определяется правилом

$$\boldsymbol{v}_T(S)=\boldsymbol{v}_T(T),S\cap T=T;\ \boldsymbol{v}_T(S)=0,S\cap T\neq T.$$

При этом значения $\boldsymbol{v}_T(T)$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Для них аксиомы Шепли сильно упрощаются, значение по Шепли получается делением $\boldsymbol{v}_T(T)$ между элементами T в равных долях, а значение по Шепли для исходной игры получается сложением $\varphi_T(T)$ по всем $T \in 2^N$. Но и это не все. Можно сразу строить игру $\boldsymbol{v}$ по формуле

$$\varphi[\boldsymbol{v}] = \sum_T \varphi[\boldsymbol{v}_T]$$

Процедура разложения на чистые степени функции v, определенной на множестве всех коалиций (подмножеств множеств $N = \{1,2,\dots,n\}$, может быть описана рекурсивным образом. Сначала вычисляются выигрыши или значения (стоимости) игроков, действующих автономно. В качестве значения первой степени v^1 для произвольной коалиции S применяется формула

$$v^1(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}), \forall S.$$

Вторая степень v^2 получается сначала для коалиций из двух элементов

$$v^2(\{i,j\}) = v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\}), \forall i,j,$$

а затем и для произвольных коалиций

$$v^2(S) = \sum_{i,j \in S} v^2(\{i,j\}), \forall S.$$

Аналогичным образом получается третья степень v^3, сначала для коалиций из трех игроков (элементов)

$$v^3(\{i,j,k\}) = v(\{i,j,k\}) - v^2(\{i,j,k\}) - v^1(\{i,j,k\})$$

потом для произвольных коалиций

$$v^3(S) = \sum_{i,j,k \in S} v(\{i,j,k\}).$$

Далее в том же ключе строятся чистые степени вплоть до степени n.

Как уже говорилось выше, любая игра на конечном множестве может быть разложена на простейшие игры, часть из которых отрицательные. В таких случаях выигрыш коалиции делится между ее участниками поровну (аксиома S2), выигрыши суммируются (аксиома S3), а сумма выигрышей совпадает с выигрышем коалиции из всех игроков (аксиома S1).

Для чистой степени формула вектора Шепли выглядит существенно проще, чем в общем виде, а потому для вычислений часто удобно использовать разложение исходной функции на чистые степени. Более того, часто неаддитивная функция с самого начала получается в виде суммы чистых степеней. При этом о наличии эффектов синергии и «каннибализма» можно догадаться практически сразу, не делая вычислений. Вычисления нужны лишь для определения конкретных значений этих эффектов. К тому же можно учитывать только наиболее значимые эффекты, что делает ситуацию обозримой.

Простейший пример. Рассмотрим игру v, описываемую как

$$N = \{1,2,3\}, v\{1,2,3\} = 1, v\{1,2\} = 1, v\{1,3\} = 1, v\{2,3\} = 0, v\{1\} = v\{2\} = v\{3\} = 0$$

Тогда получим

$$v^1\{i\} = 0 \;\forall i = 1,2,3;\;\; v^2\{1,2\} = 1, v^2\{1,3\} = 1, v^2\{2,3\} = 0$$

и

$$v^3\{1,2,3\} = v\{1,2,3\} - v^2\{1,2\} - v^2\{1,3\} - v\{1\} - v\{2\} - v\{3\} = 1.$$

В итоге выигрыш игрока 1 будет равен

$$1/2 + 1/2 - 1/3 = 2/3$$

Игроки 1 и 2 получат по 1/6.

Интересно то, что приходится рассматривать функции с отрицательные значениями, когда выигрыш от объединения усилий есть, но он гораздо меньше, чем сумма эффектов от частичных объединений, возникает эффект, именуемый отрицательной синергией или «каннибализмом». Особенно ярко этот эффект проявляется при объединении нематериальных ценностей, например знаний. Подробнее об этом сказано в статье [Козырев, 2023]. Но вернемся к двойственности.

Именно в переговорном процессе принцип двойственности оказывается наиболее полезен, поскольку в процессе переговоров постоянно открываются дополнительны возможности и ограничения, то есть на каждом этапе рассматривается игра, несколько отличающаяся от всех предыдущих. Движение к более выигрышному результату идет путем, в чем-то напоминающем обмен ресурсами в предыдущем разделе, где речь шла тоже о практической задаче, решаемой в системе Перспективное планирование АСУ Прибор. Теоретически можно предполагать, что в игре сколько угодно лиц, но носитель составляет относительно небольшое число игроков. Более того, можно предполагать с самого начала, что игра – некоторый идеальный объект, подобный аналитическому решению задачи, которое никогда не будет представлено в численном виде. А мы приближаемся к нему, строя все более точные приближенные модели и решая их. В каком-то смысле это напоминает решение сложного дифференциального уравнения с построением все более точных сеток и решения разностных уравнений.

5. Эпилог.

Если смотреть с позиций, намеченных ЭЛВЭ еще тогда (в 1939 г.), на развитие экономико-математического направления в период примерно с середины 50-х годов, когда оно стало модным, до настоящего времени, когда в нем ясно просматривается кризис [Полтерович, 2024a], то можно указать целый букет рукотворных причин такого деградационного процесса. Возможно, это будет не совсем полный букет причин, но именно их можно было избежать, если бы не личные интересы и амбиции в сочетании со слабым (например, в сравнении с сотрудниками ЛОМИ) знанием математики и недостаточным вниманием к идеям ЭЛВЭ. А потому рецепты, предлагаемые в [Полтерович, 2024b], не помогут.

Разумеется, яростное сопротивление идеям ЭЛВЭ оказывали экономисты-политэконом и (отчасти) статистики, чьи достижения и место в научной иерархии были связаны с обоснованием идеологических догм. Оно не исчезло и сегодня, место трудовой теории стоимости заменила идея свободного рынка как механизма, обеспечивающего оптимальные цены. Открытия типа «… сталевар не варит сталь, а плавит, или даже в некотором смысле кипятит»[1], приносившие успех тогда, сменились новыми примерно той же глубины рыночными мантрами. Они особенно хорошо срабатывали в конце 80-х годов прошлого века, пока народ их не попробовал на себе. Внесли свою лепту и редакции технических журналов, публиковавших с задержкой на годы (вплоть до 10 лет) статьи ЭЛВЭ, написанные подробно и просто для инженеров и других работников среднего звена,

Но и внутри экономико-математического направления, если понимать его широко, не обошлось без противоречий и непонимания. Они проявились уже на совещании 1960 года «О применении математических методов в экономических исследованиях и планировании», не исчезли и после него. Основное видимое противоречие тогда наметилось между сторонниками цен на основе межотраслевого баланса, внутри которого хватало своих противоречий, и «оптимальщиками», многие из которых воспринимали идеи ЭЛВЭ вульгарно. Возможно, самый яркий пример вульгарного восприятия идей ЭЛВЭ – поиски народнохозяйственного критерия оптимальности, продолжавшиеся, как минимум, с 1963 года по 1983 год. Невозможность и ненужность такого критерия сегодня кажутся очевидными (возможно, не всем), но и тогда об этом говорил не только ЭЛВЭ (его и тогда не слышали), но и некоторые представители Госплана (они попали в «ретрограды»). Также не была услышана явно высказанная ЭЛВЭ на конференции 1960 года мысль, что нельзя строить цены на основе межотраслевого баланса. Об этом он говорил и с Василием Леонтьевым, но ясного ответа не получил. Впрочем, это отдельная тема. В стенограммах выступлений ЭЛВЭ можно найти много мыслей, не усвоенных товарищами по цеху, занятыми продвижением своих идей, более доступных для понимания и широкими массами интеллигенции, и начальством.

Также стоит заметить, что попытки строить экономическую науку по образцу механики Ньютона, предпринятые экономистами во второй половине двадцатого века, были обречены на неудачу не в силу особой сложности экономической материи, а в силу не вполне адекватного подхода. Ньютон формулировал свои законы применительно к простым ситуациям типа движения бильярдного шара по столу, а не военной колесницы по пересеченной местности. Иначе у него получилась бы физика Аристотеля, где тело движется с постоянной скоростью под воздействием силы. Однако экономисты хотели все и сразу. А потому причины неудачи надо искать не только в экономической действительности, но и в самой экономической науке (не только российской), в соотношении её амбиций и качества используемых инструментов, числовых данных, иллюстративных примеров, в зависимости от многих интересов, наконец, в слишком большой замкнутости на саму себя. Объединение с другими гуманитарными науками – тоже не выход. Все защищают свои территории от посторонних.

Тем не менее, жизнь продолжается. Современная математика предлагает все новые инструменты на основе двойственности, позволяющие описывать и решать экономические задачи, о которых экономическая теория только начинает догадываться. Например, тропическая геометрия позволяет эффективно решать некоторые целочисленные задачи, так как двойственные к ним выпуклы. На основе двойственности можно построить идеальные с точки зрения математики цены не только для экономики обычных (материальных) апрдуктов, но и для цифровых и других нематериальных продуктов, а также для различных комбинаций того и другого. Главное – правильно интерпретировать такие цены применительно к реальным ситуациям, далеко не всегда их надо понимать буквально. А для этого надо понимать и математику, и реалии дня. Список сопряженных между собой объектов все время растет, а подход на основе принципа двойственности находит применение в развитии математического аппарата, пригодного для исследования проблем экономики, включая вычисления состояний равновесия в линейных моделях экономики [Шмырев, 1983, 2014, 2020] и не только [Гамидов, Доможиров, Ибрагимов, 2013].

Литература

1. Александров А.Д. (1950) Выпуклые многогранники. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 428 с.
2. Ауман Р., Шепли. Л. Значения для, неатомических игр. М.: Мир, **1977**.
3. Белых, А. А. (2024). Экономические идеи Л.В. Канторовича и их восприятие в СССР и на Западе. *AlterEconomics, 21*(1), 82–102. https://doi.org/10.31063/AlterEconomics/2024.21-1.6

[1] Ироническая цитата из выступления Л. В. Канторовича на сессии Академии наук в 1959 году

4. Бендиков М.А. (2025) Разработка уникальной автоматизированной системы долгосрочного планирования НИОКР, производства и развития научно-производственного потенциала космической отрасли СССР.
5. Булавский В.А. (1973) Один специальный алгоритм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5**(**22**),** Новосибирск, 1973, –. 23–36.
6. Вальрас Л. (2000) Элементы чистой политической экономии. — М.: Изограф, 2000. - 448 с. ISBN 5-87113-102-
7. Васильев В.А. (1998) Функционал Шепли и полярные формы однородных полиномиальных игр, Матем. тр., 1998, том 1, номер 2, 24–67.
8. Васильев В. А., Суслов В. И. (2010) Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сиб. журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 1. – 18–33.
9. Вершик А. М., Кутателадзе С. С., Новиков С. П. (2012) Леонид Витальевич Канторович (к 100-летию со дня рождения), УМН. 2012, том 67, выпуск 3(405), – 185–191, DOI: 10.4213/rm9475
10. Вершик А. М., Черняков А.Г. (1982a) Критические точки полей выпуклых многогранников и оптимум по Парето-Смейлу // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 3. – С. 342–345.
11. Вершик А. М., Черняков А.Г. (1982b) Поля выпуклых многогранников и оптимум по Парето-Смейлу. // Оптимизация: Сб. статей. Новосибирск, 1982. Вып. 28 (45): Проблемы выпуклого анализа и теории экстремальных задач, 1982. – С. 112–145.
12. Вирченко М. И., Шестакова Н. В. Экономическим анализ оценок продукции и ресурсов в задачах размещения сельскохозяйственного производства. - В кн.: Проблемы экономической кибернетики в сельском хозяйстве. Новосибирск, 1977, –. 34–54.
13. Гамидов Т.Г., Доможиров Д.А., Ибрагимов Н.М. (2013) Равновесные состояния открытой межрегиональной системы, порожденной оптимизационной межрегиональной межотраслевой моделью. – ISSN 1818–7862. Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2013. Том 13, выпуск 3, – 81–94.
14. Демьянов В.Ф. Васильев Л.В. (1981) Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. – 384 с.
15. Канторович Л.В. (1939) Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ. 1939. – 68 с.
16. Канторович Л.В. (1960) Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд-во Академии наук СССР, 1960–346 с.
17. Канторович Л.В. (1986) Мой путь в науке. *Успехи математических наук, 1987, том 42, выпуск 2(254), страницы 183–213*
18. Канторович В.Л., Кутателадзе С.С., Фет Я.И. Леонид Витальевич Канторович человек и ученый. Новосибирск: Издательство СО РАН, Филиал “Гео”, 2002. — Т. 1. — 544 с., ил. 48 с. ISBN 5-7692-0641-1.
19. Козырев А.Н. Оценка интеллектуальной собственности: Функциональный подход и математические методы. Издательские решения, 2016. — 350 с. ISBN 978-5-4483-4276-9
20. Козырев А. Н. (2023) Синергия и каннибализм знаний в экономике и в науке // Цифровая экономика № 3(24), 2023 – с. 5–22. DOI: 10.34706/DE-2023-03-01
21. Козырев А.Н. (2024) Мультидисциплинарный подход как шанс на спасение экономической науки (от экономистов) // Цифровая экономика № 1(27), 2024 – 5–13. DOI: 10.34706/DE-2024-01-01
22. Козырев А. Н. Об одном алгоритме многоцелевого планирования. (на примере размещения закупок сельскохозяйственной продукции по районам области). - В кн.: Численные методы оптимизации и их приложения. Иркутск, 1981, – 72–83.
23. Козырев А.Н. (1975) Оптимизация распределения ресурсов в системе линейных моделей производства - В кн.: Оптимизация. Вып. 165(33), Новосибирск, 1975, – 61–72.
24. Костин А.В, Неволин И.В. (2023) Стоимость права использования товарного знака в составе группы средств индивидуализации // Цифровая экономика № 3(24), 2023 – с. 23–28. DOI: 10.34706/DE2023-03–02
25. Макаров В. Л. (1973) Баланс научных разработок и алгоритм его решения. Оптимизация: Сб. статей. Новосибирск 11(28): 37–45.
26. Макаров В. Л. (1976) Модель экономического равновесия, учитывающая нововведения. Оптимизация: Сб. статей. Новосибирск 18: 19–45.
27. Мулен Э.*1985) Теория игр с примерами из математической экономики: Пер. с франц.—М.: Мир, 1985.—200 с/
28. Неволин И.В. (2023a) Разделение стоимости портфеля прав на средства индивидуализации между его компонентами // Цифровая экономика № 3(24), 2023 – с. 29–33. DOI: 10.34706/DE2023-03–03.
29. Неволин И.В. (2023b) Вознаграждение за передачу технологий: методы расчёта и границы применимости // Цифровая экономика № 2(23), 2023 – с. 31–35. DOI: 10.34706/DE-2023-02-03
30. Оуэн Г. Теория игр 1971, М.: Мир, 229 с

31. Полтерович В.М., (2024a), Математическая экономика в эпоху социализма и переход к рынку (часть I) // Проблемы прогнозирования. 2024. № 5 (206). С. 6–19. DOI: 10.47711/0868 -6351-206-6-19.
32. Полтерович В.М., (2024b), Математическая экономика в эпоху социализма и переход к рынку (часть II) // Проблемы прогнозирования. 2024. № 6 (207). С. 6–15. DOI: 10.47711/0868 -6351-207-6-15.
33. Рубинштейн А. Г. (1983) Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
34. Рубинштейн Г.Ш. (1973) О некоторых классах неаддитивных функций множеств. // Оптимизация: Сб. статей. Новосибирск, 1973, вып. 9(23), С. 157–164.
35. Шмырев В. И., (1983) Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена, Докл. АН СССР, 1983, Т. 268, № 5, – 1062–1066
36. Шмырев В. И., (2014) Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных моделях конкурентной экономики // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 2. – . 84–101.
37. Шмырев В. И., (2020) Двойственность в линейных экономических моделях обмена // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. - 2020. - Т. 26. - № 3, – 258–274
38. Смейл С. (1972) Глобальный анализ и экономика, I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса / Успехи математических наук, т. XXVII, вып. 3(165). – 177–187.
39. Debreu G. (1972) Smooth Preferences. Econometrica 40, – 603–616.
40. Debreu G. (1974) Four Aspects of the Mathematical Theory of Economic Equilibrium. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vancouver, 1974. – 65–77.
41. Demyanov, V. F. and Rubinov A. M., (1995), “Constructive Nonsmooth Analysis,” Verlag Peter Lang, New York, 1995
42. Keiding, H., (2020) Theory of general economic equilibrium Description: Singapore; Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., [2020] | Includes bibliographical references and index. Identifiers: LCCN 2020006477 | ISBN 9789811214387 (hardcover) | ISBN 9789811214394 (ebook)
43. Michio Morishima (1973) MARX'S ECONOMIC'S A dual theory' of value and growth. Cambridge University Press 1973.
44. Michio Morishima (1977) Walras's Economics: A pure theory of capital and money, 1977
45. Michio Morishima (1989) Ricardo's Economics, 1989.
46. Smale, S. (1975) Global analysis and economics. Synthese Volume Issue 31, p. 345–358 (1975). https://doi.org/10.1007/BF00485983
47. Smale, S. (1976), Exchange processes with price adjustment, Journal of Mathematical Economics, Elsevier, vol. 3(3), – 211-226.
48. Smale, S. (1974a), “Global analysis and economics IIA: Extention of a theorem of Debreu”//J. Math. Econom., Volume 1, Issue 1, March 1974, p. 1-14
49. Smale, S. (1974b), “Global analysis and economics IV, Finiteness and stability of equilibria with general consumption sets and production”. J. Math. Econom., Volume 1, Issue 1, p. 119–127.
50. Smale, S. (1973) Global analysis and economics. I. Pareto optimum and a generalization of Morse theory. In: Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), – 531-544. Academic Press, New York (1973)

References in Cyrillics

1. Aleksandrov A.D. (1950) Vy`pukly`e mnogogranniki. — M.-L.: Gostexizdat, 1950. — 428 s.
2. Auman R., Shepli. L. Znacheniya dlya, neatomicheskix igr. M.: Mir, 1977.
3. Bely`x, A. A. (2024). E`konomicheskie idei L.V. Kantorovicha i ix vospriyatie v SSSR i na Zapade. AlterEconomics, 21(1), 82–102. https://doi.org/10.31063/AlterEconomics/2024.21-1.6
4. Bendikov M.A. (2025) Razrabotka unikal`noj avtomatizirovannoj sistemy` dolgosrochnogo planirovaniya NIOKR, proizvodstva i razvitiya nauchno-proizvodstvennogo potenciala kosmicheskoj otrasli SSSR.
5. Bulavskij V.A. (1973) Odin special`ny`j algoritm kvadratichnogo programmirovaniya. - V kn.: Op-timizaciya. Vy`p. 5(22), Novosibirsk, 1973, –. 23–36.
6. Val`ras L. (2000) E`lementy` chistoj politicheskoj e`konomii. — M.: Izograf, 2000. - 448 s. ISBN 5-87113-102-
7. Vasil`ev V.A. (1998) Funkcional Shepli i polyarny`e formy` odnorodny`x polinomi-l`ny`x igr, Matem. tr., 1998, tom 1, nomer 2, 24–67.
8. Vasil`ev V. A., Suslov V. I. (2010) Ravnovesie E`dzhvorta v odnoj modeli mezhregional`ny`x e`konomicheskix otnoshenij // Sib. zhurnal industrial`noj matematiki. 2010. T. 13, № 1. – 18–33.
9. Vershik A. M., Kutateladze S. S., Novikov S. P. (2012) Leonid Vital`evich Kantorovich (k 100-letiyu so dnya rozhdeniya), UMN. 2012, tom 67, vy`pusk 3(405), – 185–191, DOI: 10.4213/rm9475
10. Vershik A. M., Chernyakov A.G. (1982a) Kriticheskie tochki polej vy`pukly`x mnogogrannikov i optimum po Pareto-Smejlu // Doklady` AN SSSR. – 1982. – T. 266, № 3. – S. 342–345.

11. Vershik A. M., Chernyakov A.G. (1982b) Polya vy`pukly`x mnogogrannikov i optimum po Pareto-Smejlu. // Optimizaciya: Sb. statej. Novosibirsk, 1982. Vy`p. 28 (45): Problemy` vy`puklogo analiza i teo-rii e`kstremal`ny`x zadach, 1982. – S. 112–145.
12. Virchenko M. I., Shestakova N. V. E`konomicheskim analiz ocenok produkcii i resursov v zadachax razmeshheniya sel`skoxozyajstvennogo proizvodstva. - V kn.: Problemy` e`konomicheskoj kibernetiki v sel`skom xozyajstve. Novosibirsk, 1977, –. 34–54.
13. Gamidov T.G., Domozhirov D.A., Ibragimov N.M. (2013) Ravnovesny`e sostoyaniya otkry`toj mezhregi-onal`noj sistemy`, porozhdennoj optimizacionnoj mezhregional`noj mezhotraslevoj model`yu. – ISSN 1818–7862. Vestnik NGU. Seriya: Social`no-e`konomicheskie nauki. 2013. Tom 13, vy`pusk 3, – 81–94.
14. Dem`yanov V.F. Vasil`ev L.V. (1981) Nedifferenciruemaya optimizaciya. M.: Nauka, 1981. – 384 s.
15. Kantorovich L.V. (1939) Matematicheskie metody` organizacii i planirovaniya proizvodstva. L.: Izd-vo LGU. 1939. – 68 s.
16. Kantorovich L.V. (1960) E`konomicheskij raschet nailuchshego ispol`zovaniya resursov. Izd-vo Akademii nauk SSSR, 1960–346 s.
17. Kantorovich L.V. (1986) Moj put` v nauke. Uspexi matematicheskix nauk, 1987, tom 42, vy`pusk 2(254), stranicy 183–213
18. Kantorovich V.L., Kutateladze S.S., Fet Ya.I. Leonid Vital`evich Kantorovich chelovek i ucheny`j. Novosi-birsk: Izdatel`stvo SO RAN, Filial “Geo”, 2002. — T. 1. — 544 s., il. 48 s. ISBN 5-7692-0641-1.
19. Kozy`rev A.N. Ocenka intellektual`noj sobstvennosti: Funkcional`ny`j podxod i matematiche-skie meto-dy`. Izdatel`skie resheniya, 2016. — 350 s. ISBN 978-5-4483-4276-9
20. Kozy`rev A. N. Sinergiya i kannibalizm znanij v e`konomike i v nauke // Cifrovaya e`konomika № 3(24), 2023 – s. 5–22. DOI: 10.34706/DE-2023-03-01
21. Kozy`rev A.N. (2024) Mul`tidisciplinarny`j podxod kak shans na spasenie e`konomicheskoj nauki (ot e`konomistov) // Cifrovaya e`konomika № 1(27), 2024 – 5–13. DOI: 10.34706/DE-2024-01-01
22. Kozy`rev A. N. Ob odnom algoritme mnogocelevogo planirovaniya. (na primere razmeshheniya zakupok sel`skoxozyajstvennoj produkcii po rajonam oblasti). - V kn.: Chislenny`e metody` optimiza-cii i ix prilozheniya. Irkutsk, 1981, – 72–83.
23. Kozy`rev A.N. (1975) Optimizaciya raspredeleniya resursov v sisteme linejny`x modelej proiz-vodstva - V kn.: Optimizaciya. Vy`p. 165(33), Novosibirsk, 1975, – 61–72.
24. Kostin A.V, Nevolin I.V. (2023) Stoimost` prava ispol`zovaniya tovarnogo znaka
25. v sostave gruppy` sredstv individualizacii // Cifrovaya e`konomika № 3(24), 2023 – s. 23–28. DOI: 10.34706/DE2023-03-02
26. Makarov V. L. (1973) Balans nauchny`x razrabotok i algoritm ego resheniya. Optimizaciya: Sb. statej. Novosibirsk 11(28): 37–45.
27. Makarov V. L. (1976) Model` e`konomicheskogo ravnovesiya, uchity`vayushhaya novovvedeniya. Optimizaciya: Sb. statej. Novosibirsk 18: 19–45.
28. Mulen E`.*1985) Teoriya igr s primerami iz matematicheskoj e`konomiki: Per. s francz.—M.: Mir, 1985.—200 s
29. Nevolin I.V. (2023a) Razdelenie stoimosti portfelya prav na sredstva individualizacii mezh-du ego kom-ponentami // Cifrovaya e`konomika № 3(24), 2023 – s. 29–33. DOI: 10.34706/DE2023-03-03.
30. Nevolin I.V. (2023b) Voznagrazhdenie za peredachu texnologij: metody` raschyota i granicy primenimosti // Cifrovaya e`konomika № 2(23), 2023 – s. 31–35. DOI: 10.34706/DE-2023-02-03
31. Oue`n G. Teoriya igr 1971, M.: Mir, 229 s
32. Polterovich V.M., (2024 a), Matematicheskaya e`konomika v e`poxu socializma i perexod k ry`nku (chast` I) // Problemy` prognozirovaniya. 2024. № 5 (206). S. 6–19. DOI: 10.47711/0868 -6351-206-6-19.
33. Polterovich V.M., (2024 b), Matematicheskaya e`konomika v e`poxu socializma i perexod k ry`nku (chast` II) // Problemy` prognozirovaniya. 2024. № 6 (207). S. 6–15. DOI: 10.47711/0868 -6351-207-6-15.
34. Rubinshtejn A. G. (1983) Modelirovanie e`konomicheskix vzaimodejstvij v territorial`ny`x si-stemax. Novosibirsk: Nauka, 1983. – 238 s.
35. Rubinshtejn G.Sh. (1973) O nekotory`x klassax neadditivny`x funkcij mnozhestv. // Optimizaciya: Sb. statej. Novosibirsk, 1973, vy`p. 9(23), S. 157–164.
36. Shmy`rev V. I., (1983) Ob odnom podxode k oty`skaniyu ravnovesiya v prostejshix modelyax obmena, Dokl. AN SSSR, 1983, T. 268, № 5, – 1062–1066
37. Shmy`rev V. I., (2014) Algoritmy` polie`dral`noj komplementarnosti dlya oty`skaniya ravnovesiya v linejny`x modelyax konkurentnoj e`konomiki // Diskretny`j analiz i issledovanie operacij. 2014. T. 21, № 2. – . 84–101.
38. Shmy`rev V. I., (2020) Dvojstvennost` v linejny`x e`konomicheskix modelyax obmena // Tr. In-ta matematiki i mexaniki UrO RAN. - 2020. - T. 26. - № 3, – 258–274
39. Smejl S. (1972) Global`ny`j analiz i e`konomika, I. Optimum Pareto i obobshhenie teorii Morsa / Uspexi matematicheskix nauk, t. XXVII, vy`p. 3(165). – 177–187..

Ключевые слова
двойственность, квазидифференциал, критическая точка, многообразие, равновесие

Козырев Анатолий Николаевич, к.ф.-м.н., д.э.н
Центральный экономико-математический институт РАН
ORCID 0000-0003-3879-5745,
kozyrevan@yandex.ru

Anatoly Kozyrev, The principle of duality and computation in mathematical models of economics

Keywords
duality, quasidifferential, critical point, manifold, equilibrium.

DOI: 10.34706/DE-2025-03-01

JEL classification: C65-Разнообразные математические инструменты; C71Кооперативные игры

Abstract
The possibilities of mathematical modeling and calculations based on the principle of duality, introduced by L.V. Kantorovich from functional analysis to convex analysis, linear programming and economics, which have not been fully used to date, are shown. Special attention is paid to calculations in conditions of initial incompleteness of information and the appearance of additional conditions as the extremum tasks are solved. Examples from practice are used as illustrations. The author's point of view on the causes of the crisis of economics in general and economics and mathematics in particular is expressed.